SÉRIE VIII. — TOME IX. N° 6. JUIN 1948.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

RELATION ENTRE LA CONSTANTE D'ANISOTROPIE ET LA LOI D'APPROCHE A LA SATURATION DES FERROMAGNÉTIQUES (1)

Par M. LOUIS NÉEL.

Université de Grenoble, Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal.

Sommaire. — Quand le champ H croît, l'aimantation $\mathcal{J}$ d'un ferromagnétique cubique polycristallin tend vers la saturation $\mathcal{J}_s$ selon la loi d'approche

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{b}{H^2}\right) \qquad (A)$$

et une théorie actuellement admise montre que b est égal à $8\,K^2 : 105\,\mathcal{J}_s^2$ où K est la constante d'anisotropie. L'auteur montre que cette théorie n'est pas correcte car elle a été obtenue en négligeant les interactions magnétiques entre les cristallites dont le rôle est considérable. Les vérifications expérimentales qu'on en a données sont tout à fait illusoires, soit par suite d'interprétations trop sommaires, soit par l'emploi de substances à tensions internes résiduelles trop grandes.

L'auteur développe ensuite une méthode nouvelle de calcul qui permet de tenir compte des interactions magnétiques et obtient ainsi une loi d'approche rigoureuse qui n'a pas la forme (A). Cependant, dans la région pratiquement la plus intéressante, c'est-à-dire de 200 à 1000 œrsteds, elle peut se mettre approximativement sousla forme (A), mais la valeur de b est à peu près deux fois plus petite que la valeur donnée plus haut. De nouvelles mesures effectuées sur du nickel bien pur et bien recuit ont confirmé ces résultats. Les formules obtenues permettent de déterminer K au moyen de mesures effectuées sur des échantillons polycristallins.

I. Introduction.

1. **Détermination de la constante K d'anisotropie, par l'étude de l'approche à la saturation.** — *Cas d'un monocristal.* — On sait que l'énergie libre F d'un cristal ferromagnétique est la somme de plusieurs termes dont l'un F_m appelé énergie magnétocristalline, dépend de l'orientation de l'aimantation spontanée $\mathcal{J}_s$ par rapport aux axes cristallins. Dans un cristal cubique, l'expression suivante donne une représentation satisfaisante de F_m, en fonction des cosinus directeurs α, β, γ, de $\mathcal{J}_s$ par rapport aux axes quaternaires

$$F_m = K(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2). \qquad (1)$$

Si le cristal est soumis à un champ uniforme $\vec{H}$, l'énergie libre comprend en outre un second terme F_h égal à $-\vec{H}\vec{\mathcal{J}}_s$.

Dans un cristal parfait, la position d'équilibre de $\vec{\mathcal{J}}_s$ s'obtient en écrivant que l'énergie libre $F = F_m + F_h$ est minimum. Lorsque le champ H devient de plus en plus intense, tout en gardant une direction donnée par rapport au cristal, l'aimantation spontanée tend à devenir parallèle au champ et sa composante $\mathcal{J}$ suivant cette direction, tend vers l'aimantation à saturation $\mathcal{J}_s$. On montre facilement que l'approche à la saturation s'effectue suivant une loi de la forme

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{b}{H^2}\right), \qquad (2)$$

où le coefficient b dépend de l'orientation de H par rapport aux axes du cristal.

(1) Les travaux expérimentaux et théoriques qui font l'objet de cet arti le ont été poursuivis et achevés pendant l'occupation. La parution en a été retardée par suite de difficultés matérielles. Devant les retards d'impression qui s'annonçaient déjà en 1945, une brève note a été publiée sur le même sujet (*C. R. Acad. Sc.*, 1945, 220, p. 814).

Cas d'un polycristal. — La formule précédente, applicable à un monocristal, n'a fait l'objet d'aucune vérification expérimentale, mais depuis longtemps on s'est proposé de l'appliquer à un polycristal. Le premier, Akulov [2] a calculé la valeur de b relative à un polycristal en faisant la moyenne des valeurs obtenues en donnant à un monocristal toutes les orientations possibles; on obtient ainsi

$$b = \frac{8}{105}\frac{K^2}{\mathcal{J}_s^2}. \qquad (3)$$

Gans [3] et plus tard Becker [4] ont repris le même raisonnement et obtenu le même résultat.

Vérifications expérimentales. — Entre temps, Czerlinski [5] a montré expérimentalement que les polycristaux de fer et de nickel obéisssaient à une loi d'approche de la forme (2) et, à partir des valeurs de b ainsi obtenues et compte tenu de la formule (3), il en a déduit des valeurs de K qui, entre — 150° et 150° C, concordent avec les valeurs de la littérature déterminées par les méthodes habituelles applicables aux monocristaux. De son côté, Polley [6] a repris l'étude du polycristal de nickel et montré qu'en réalité il fallait remplacer la loi d'approche (2) par une loi plus complexe de la forme

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{a}{H} - \frac{b}{H^2}\right) + \chi H; \qquad (4)$$

mais, en supposant que le terme en $\frac{a}{H}$ provenait d'un mécanisme inconnu mais n'altérant pas le terme $\frac{b}{H^2}$, il a pu, comme plus haut, calculer à différentes températures des valeurs de K qui s'accordent encore avec celles de la littérature.

Il semble donc que nous soyons en possession d'une méthode éprouvée de détermination des coefficients d'anisotropie K, à partir de mesures effectuées sur des polycristaux, ce qui présente un intérêt expérimental évident. Malheureusement, on peut élever contre cet ensemble de résultats de graves objections, tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental.

2. **Objections d'ordre théorique à la méthode précédente.** — Il ne semble pas légitime de calculer le coefficient b relatif à un polycristal en prenant la moyenne des valeurs de b relatives aux cristallites élémentaires supposés isolés, car on néglige ce faisant les champs démagnétisants internes développés par les charges magnétiques qui proviennent de la non-uniformité de l'aimantation du polycristal.

Pour un cristallite isolé, la présence du champ démagnétisant n'introduit pas de difficulté spéciale : le cristallite est en moyenne sphérique de sorte que son coefficient moyen de champ démagnétisant est indépendant de la direction et égal à $\frac{4}{3}\pi$. D'autre part, comme la théorie suppose implicitement un champ appliqué suffisamment intense pour qu'il n'existe qu'un seul domaine élémentaire par cristallite, il en résulte que l'aimantation d'un cristallite est toujours égale à l'aimantation spontanée et que les seuls changements d'aimantation à considérer proviennent de la pure rotation d'un vecteur de grandeur $\mathcal{J}_s$ invariable [7], rotation au cours de laquelle l'énergie de champ démagnétisant reste invariable et égale à $\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\mathcal{J}_s^2$ ergs : cm³. Il n'y a donc pas à tenir compte de ce champ démagnétisant.

Il n'en est plus de même pour l'ensemble des cristallites juxtaposés qui constitue le polycristal. Supposons en effet que les cristallites possèdent ainsi réunis, le même état d'aimantation qu'à l'état isolé. Comme la direction de l'aimantation spontanée varie d'un cristallite à l'autre, il apparaît sur les surfaces de séparation des charges magnétiques fictives qui créent des champs magnétiques et augmentent ainsi l'énergie libre. Mais, tandis que dans un cristallite isolé cette énergie conserve la même valeur lorsque l'aimantation devient parallèle au champ appliqué, ici au contraire cette énergie supplémentaire disparaît à la saturation lorsque tous les cristallites prennent des aimantations parallèles (on suppose que le polycristal a la forme d'un barreau allongé dans la direction du champ). Il en résulte nécessairement des forces qui tendent à faciliter la saturation.

On peut apprécier l'effet de ces interactions par le raisonnement suivant : si l'on extrait d'un polycristal un cristallite élémentaire, le champ qui règne dans la cavité correspondante est, *en moyenne* égal à $H + \frac{4}{3}\pi\mathcal{J}$, en désignant par $\mathcal{J}$ l'aimantation moyenne du polycristal. C'est ce champ total qui agit effectivement sur le cristallite. Comme au voisinage de la saturation, $\mathcal{J}$ est pratiquement égal à $\mathcal{J}_s$, il faut donc remplacer le terme en $\frac{b}{H^2}$ de la loi (2) par un terme en $\frac{b}{\left(H + \frac{4}{3}\pi\mathcal{J}_s\right)^2}$. Dans le cas du nickel, où $\mathcal{J}_s$ est voisin de 500 C. G. S., et dans un champ de 1000 œrsteds, on constate que le nouveau terme est neuf fois plus petit que le terme primitif. Sans doute le raisonnement esquissé ici est-il trop grossier pour nous donner un résultat

(2) Akulov, *Z. Physik*, 1931, 69, p. 822.
(3) Gans, *Ann. der Physik*, 1932, 15, p. 28.
(4) Becker et Döring, Ferromagnetismus, p. 168 (Springer, Berlin, 1939).
(5) Czerlinski, *Ann. der Physik*, 1932, 13, p. 80.
(6) Polley, *Ann. der Physik*, 1939, 36, p. 625.

(7) Pour cette question, se reporter au mémoire de Néel, Les lois de l'aimantation et de la subdivision en domaines élémentaires d'un monocristal de fer, *J. de Physique*, 1944, t. 5, p. 241-251.

précis, mais il suffit à montrer que les interactions entre cristallites sont considérables et qu'il ne peut être question de les négliger.

Finalement la loi (2) avec la valeur de b donnée en (3) est grossièrement inexacte.

3. **Objections d'ordre expérimental.** — Il s'agit alors d'expliquer dans quelles conditions les auteurs précités ont pu obtenir des valeurs correctes de K à partir de formules inexactes.

Expériences de Czerlinski. — En ce qui concerne ces expériences, une discussion serrée du mémoire de l'auteur, qu'il n'y a pas intérêt à reproduire ici, montre que ses résultats sont beaucoup mieux représentés par une formule du type

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{a}{H} - \frac{c}{H^3}\right), \tag{5}$$

sans terme en $\frac{b}{H^2}$, que par la formule qu'il indique, ne comprenant pas de terme en $\frac{a}{H}$, mais avec un terme en $\frac{b}{H^2}$, et qui présente des déviations systématiques par rapport à l'expérience. On obtient d'ailleurs selon cette nouvelle interprétation une valeur de a égale à 5,2 qui est du même ordre de grandeur que les valeurs obtenues par d'autres auteurs pour du fer pur ([8]). Ainsi les expériences de Czerlinski, loin d'appuyer la théorie d'Akulov-Gans-Becker, montrent plutôt que la valeur du terme en $\frac{b}{H^2}$ prévue par celle-ci est trop grande. Il faut cependant remarquer que la présence d'un terme supplémentaire en $\frac{a}{H}$, dû probablement aux imperfections des cristallites ([8]), rend l'interprétation incertaine car il est à craindre que ces imperfections ne se manifestent aussi par un terme supplémentaire en $\frac{b'}{H^2}$.

Expériences de Polley. — De ce point de vue, les expériences de Polley sur le nickel se présentent plus favorablement, car le terme en $\frac{a}{H}$ y est très faible, mais l'échantillon de cet auteur doit néanmoins être encore assez éloigné de la perfection, comme le montre la méthode suivante.

4. **Signification et calcul du travail d'aimantation.** — Dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne savons pas calculer la courbe d'aimantation d'un polycristal, mais il existe une grandeur dont la détermination expérimentale est facile et qui, indépendamment de toute théorie, peut être calculée en fonction de la constante d'anisotropie : il s'agit du travail d'aimantation.

Du point de vue expérimental, le travail d'aimantation est égal à l'aire comprise entre la courbe d'aimantation (aimantation en fonction du champ), l'asymptote à la saturation et l'axe des ordonnées. Cette méthode suppose qu'il n'y a pas d'hystérésis; on peut cependant encore, comme l'a montré Kersten ([9]) dans un cas analogue, évaluer le travail réversible d'aimantation quand l'hystérésis est faible : en mesurant l'aire comprise entre la branche descendante du cycle limite et l'asymptote à la saturation (*fig.* 1) car cette branche SR du cycle est sensiblement réversible.

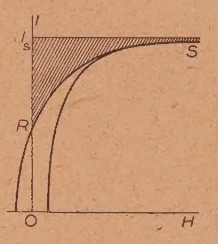


Fig. 1. — La branche descendante SR du cycle limite est sensiblement réversible : l'aire hachurée correspond donc au travail d'aimantation.

Du point de vue théorique, le travail d'aimantation est égal à la différence entre l'énergie interne à la saturation et l'énergie interne dans l'état initial, quand l'aimantation est nulle.

Dans cet état initial, l'aimantation spontanée des différents domaines élémentaires est dirigée suivant l'une des directions dites privilégiées, correspondant à un minimum de l'énergie magnétocristalline. Lorsque K est positif (cas du fer), le minimum de l'énergie magnétocristalline F_m est zéro; lorsque K est négatif (cas du nickel) ce minimum est égal à $\frac{K}{3}$. D'autre part, à la saturation, l'aimantation spontanée est parallèle au champ appliqué, de sorte que la valeur moyenne de l'énergie d'un polycristal est égale à la valeur moyenne de F_m donnée par l'expression (1), quand le vecteur unitaire α, β, γ prend toutes les orientations possibles : un calcul élémentaire montre que cette moyenne est égale à $\frac{K}{5}$.

Finalement, il en résulte que le travail d'aimantation d'un polycristal est égal à $\frac{K}{5}$ ergs : cm³, quand K est positif, et égal à $\frac{K}{5} - \frac{K}{3} = \frac{-2K}{15}$ ergs : cm³, quand K est négatif.

([8]) Néel, La loi d'approche en 1 : *H*, *J. de Physique*, 1948, 9, p. 184.

([9]) Kersten, *Z. Physik*, 1932, 76, p. 505.

Application aux expériences de Polley. — Or, d'après les données de la littérature relatives aux monocristaux de nickel (*cf*, Becker, *Loc. cit.*, p. 123), K est voisin de $-5{,}0.10^4$ ergs : cm³, d'où il résulte qu'à la température ordinaire, le travail d'aimantation d'un polycristal de nickel est voisin de $6{,}6.10^3$ ergs : cm³.

D'autre part, d'après les données numériques et les graphiques du mémoire de Polley, il résulte qu'à 14° C le travail d'aimantation du nickel qu'il a étudié était voisin de 13.10^3 ergs : cm³, valeur double de la valeur théorique. Malgré le recuit qu'il avait subi, ce nickel était donc probablement affecté de tensions internes relativement considérables altérant de façon importante la courbe d'aimantation; on sait en effet que, par suite de la grandeur de sa magnétostriction, le nickel est particulièrement sensible aux tensions internes.

5. **Nouvelles mesures sur le nickel.** — Dans ces conditions, il était intéressant de reprendre la mesure du coefficient b sur du nickel pur, débarrassé de tensions internes.

Méthode. — A cet effet nous avons étudié, à la température ordinaire, un fil de nickel pur. Le fil, de 0,4 mm de diamètre et de 130 cm de longueur, était tendu à l'intérieur d'un solénoïde de 95 cm de longueur. La bobine de flux, convenablement compensée de manière à indiquer directement au galvanomètre balistique les variations de $4\pi\mathcal{J}$, avait 20 cm de longueur. Toutes dispositions étaient prises pour pouvoir tracer des cycles, point par point, à partir d'une origine arbitrairement choisie. Le fil avait été recuit 3 h à 1000° C, dans de l'hydrogène soigneusement purifié. Des recuits ultérieurs, poussés jusqu'à 1200° C, n'ont pas modifié de manière sensible la forme de la courbe d'aimantation.

Résultats. — Ils sont donnés par les figures 2 et 3. Le champ coercitif de ce nickel était très faible : égal à 0,66 œrsted. On pouvait donc espérer qu'il était bien libre de tensions internes. Nous avons en effet trouvé que l'aire comprise entre la branche descendante du cycle limite et son asymptote était égale à $6{,}4.10^3$ ergs : cm³, à la température de 27° C; cette valeur est extrêmement voisine de la valeur théorique obtenue plus haut.

Pour préciser la loi d'approche à la saturation du nickel ainsi traité, nous avons sur la figure 3 représenté l'aimantation en fonction de $\frac{1}{H^2}$. Entre 150 et 750 œrsteds, on obtient ainsi sensiblement une droite qui s'extrapole vers une aimantation à saturation égale à 497,5. Dans cet intervalle de champ, les termes en $\frac{a}{H}$ et en χH du développement (4) ne sont pas sensibles. La formule (2) suffit alors pour représenter les expériences avec un coefficient b égal à 290, à la température de 27° C. Pour cette même température, en interpolant les résultats de Polley, on obtiendrait $b = 550$, valeur sensiblement double de la précédente.

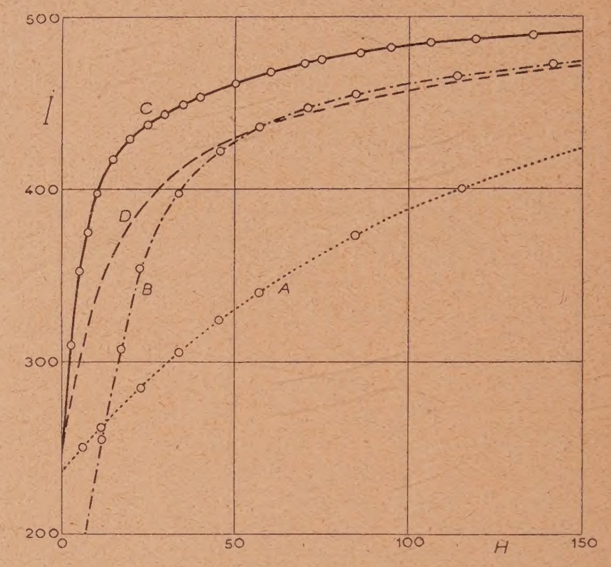


Fig. 2. — Courbes d'aimantation dans des champs moyens de différents échantillons de nickel : A, fil tel qu'il sort de la bobine ($H_c = 8{,}7$ œ); B, le même fil recuit 15 m à 900° dans l'air ($H_c = 5{,}4$ œ); C, le même recuit 3 h à 1000° dans l'hydrogène ($H_c = 0{,}7$ œ); D, fil étudié par Polley.

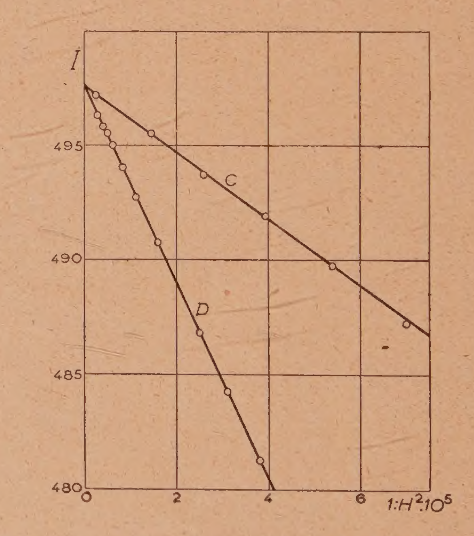


Fig. 3. — Approche à la saturation dans les champs forts, en fonction de l'inverse du carré du champ : C, fil de nickel recuit 3 h à 1000° dans l'hydrogène; D, fil étudié par Polley (d'après ses mesures).

Cette différence entre les propriétés de deux échantillons de nickel pur ayant subi des traitements thermiques voisins est difficile à expliquer : remarquons simplement que l'échantillon de Polley était plus massif que le nôtre, ayant 5 mm de

diamètre, et que les impuretés pouvaient y avoir plus de difficultés pour diffuser à la surface et s'éliminer; en outre, Polley ne semble pas avoir pris de précautions spéciales pour purifier l'hydrogène.

Quoi qu'il en soit, il en résulte que du point de vue expérimental, pour du nickel aussi bien débarrassé que possible des tensions parasites, le terme en $\frac{b}{H^2}$ de la loi d'approche est, entre 200 et 700 œrsteds, deux fois plus petit que le terme théorique, calculé en négligeant les interactions entre les cristallites.

II. Théorie de la loi d'approche d'un polycristal.

6. **Représentation analytique des forces magnétocristallines dans un polycristal.** — Exposons maintenant une méthode de calcul applicable à un polycristal constitué de cristallites élémentaires, dont les orientations sont réparties au hasard, placé dans un champ magnétique suffisant pour qu'en tout point l'aimantation soit voisine de la saturation. En chaque point, l'aimantation est en équilibre sous l'action du champ magnétique appliqué H et des forces magnétocristallines. Tant qu'on se borne à étudier l'approche à la saturation, ces dernières forces sont équivalentes du point de vue formel à un champ magnétique F, d'intensité convenable, perpendiculaire au champ H : naturellement la grandeur et l'orientation de F changent d'un cristallite à l'autre.

Découpons d'autre part dans le polycristal un cube de côté L, très grand vis-à-vis des dimensions des cristallites. Il est clair qu'en juxtaposant les uns aux autres, par des translations suivant trois directions rectangulaires, des cubes identiques au premier, on obtient un polycristal périodique indéfini de propriétés pratiquement identiques à celles du polycristal initial. Ceci posé, rapportons ce polycristal périodique à trois axes rectangulaires OXYZ. La composante du champ F suivant une direction Δ quelconque est développable en une série de Fourier

$$F_\delta = \sum M_{pqr} \exp\left\{\frac{2i\pi}{L}(px + qy + rz)\right\} \qquad (6)$$

où le signe somme est étendu, ici comme dans tout ce qui va suivre, à toutes les valeurs entières de pqr de $-\infty$ à $+\infty$. Les coefficients M_{pqr} sont des quantités complexes qui, F_δ étant réel, satisfont à la relation

$$M_{-p,-q,-r} = M^*_{pqr} \qquad (7)$$

en désignant par un astérisque * l'imaginaire conjuguée.

En découpant le cube initial dans un autre endroit du polycristal, on obtient naturellement des coefficients M_{pqr} entièrement différents de sorte qu'il importe plutôt de connaître leurs valeurs probables que leurs valeurs réelles pour un développement particulier. Comme le polycristal est en moyenne isotrope, il en résulte que, comme nous l'avons déjà montré sur un exemple analogue ([8]), la loi de probabilité qui fixe la valeur de M_{pqr} ne dépend que du seul paramètre : $\rho = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, car le développement doit conserver la même forme pour une rotation quelconque des axes. En particulier, la valeur moyenne $\overline{M_{pqr} M^*_{pqr}}$ du produit $M_{pqr} M^*_{pqr}$ est une fonction positive de ρ.

Supposons alors les axes orientés de manière à ce que OZ soit parallèle au champ appliqué H; les composantes F_x et F_y de F suivant OX et OY sont représentables par deux développements du type (6), identiques en moyenne par raison de symétrie. Les coefficients correspondants, M_{pqr} et M'_{pqr} obéissent aux relations suivantes, où l'on a pris la valeur moyenne, par rapport à toutes les positions possibles du cube initial, de la quantité située au-dessous du trait

$$\overline{M_{pqr}} = \overline{M'_{pqr}} = 0, \qquad \overline{M_{pqr} M^*_{pqr}} = \overline{M'_{pqr} M'^*_{pqr}} = F_\rho, \qquad (8)$$

où F_ρ est une quantité positive qui ne dépend que de ρ. En outre, puisque les M et les M' sont indépendants, on a

$$\overline{M_{pqr} M'^*_{pqr}} = 0, \qquad \overline{M^*_{pqr} M'_{pqr}} = 0. \qquad (9)$$

7. **Loi d'approche sans interactions entre les cristallites.** — Désignons par α et β les angles avec OZ des projections sur les plans XOZ et YOZ de l'aimantation $\mathcal{J}_s$ en un point. Puisque les angles α et β sont petits, la conditions d'équilibre de l'aimantation s'écrit simplement

$$\alpha = \frac{F_x}{H}, \qquad \beta = \frac{F_y}{H}; \qquad (10)$$

et, au second ordre près, l'aimantation macroscopique $\mathcal{J}$, égale à la valeur moyenne de la projection de l'aimantation sur OZ, s'écrit

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{\overline{\alpha^2} + \overline{\beta^2}}{2}\right) = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{\overline{F_x^2} + \overline{F_y^2}}{2H^2}\right). \qquad (11)$$

Pour obtenir $\overline{F_x^2}$, il faut, après avoir élevé l'expression (6) au carré, effectuer successivement les moyennes par rapport à xyz et par rapport à toutes les valeurs possibles des coefficients M; on obtient finalement, compte tenu des relations (7) et (8)

$$\overline{F_x^2} = \overline{F_y^2} = \sum \overline{M_{pqr} M^*_{pqr}} = \sum F_\rho, \qquad (12)$$

d'où la loi d'approche

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{\Sigma F_\rho}{H^2}\right), \qquad (13)$$

Comme cette loi doit être identique à la loi donnée par les méthodes classiques, on déduit, après avoir rapproché les relations (2), (3) et (13)

$$\sum F_\rho = \frac{8}{105} \frac{K^2}{\mathcal{J}_s^2}. \tag{14}$$

8. **Introduction des interactions.** — Nous allons maintenant introduire les interactions entre les cristallites qui avaient été négligées par Akulov et ses successeurs : Gans et Becker. Ces interactions se manifestent par l'existence d'un champ démagnétisant interne dérivant d'un potentiel V et provenant de la non-uniformité de l'aimantation du polycristal. La condition d'équilibre (10) doit être remplacée par la suivante :

$$\alpha = \frac{1}{H}\left(F_x - \frac{\partial V}{\partial x}\right); \qquad \beta = \frac{1}{H}\left(F_y - \frac{\partial V}{\partial y}\right). \tag{15}$$

D'autre part, le potentiel V satisfait à l'équation de Poisson : $\Delta V + 4\pi m = 0$ avec $m = -\operatorname{div} \mathcal{J}$. Mais comme les composantes locales de l'aimantation sur les trois axes sont, au second ordre près, respectivement égale à $\alpha \mathcal{J}_s$, $\beta \mathcal{J}_s$ et $\mathcal{J}_s$ on en déduit

$$\begin{aligned} -m &= \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial z} \\ &= \frac{\mathcal{J}_s}{H}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

et l'équation de Poisson prend la forme

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{4\pi \mathcal{J}_s}{H}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ = \frac{4\pi \mathcal{J}_s}{H}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Des développements du type (6) qui définissent F_x et F_y, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{2i\pi}{L} \sum (p M_{pqr} + q M'_{pqr}) \\ &\times \exp\left\{\frac{2i\pi}{L}(px + qy + rz)\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

L'équation (17) est donc satisfaite par un développement de la forme

$$V = \sum v_{pqr} \exp\left\{\frac{2i\pi}{L}(px + qy + rz)\right\}, \tag{19}$$

où les coefficients v sont donnés par

$$\left. \begin{aligned} v_{pqr} &= \frac{b L (p M_{pqr} + q M'_{pqr})}{2i\pi[b(p^2+q^2) + p^2 + q^2 + r^2]} \\ &\text{avec} \quad b = \frac{4\pi \mathcal{J}_s}{M}. \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

En reportant cette expression de V dans la relation (15), on en déduit comme valeur moyenne de α^2 par rapport à xyz

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^2 = \frac{1}{H^2} \sum \left[\frac{bp(pM + qM')}{b(p^2+q^2) + \rho^2} - M\right] \\ \times \left[\frac{bp(pM^\star + qM'^\star)}{b(p^2+q^2) + \rho^2} - M^\star\right] \end{aligned} \tag{21}$$

et une expression symétrique pour $\bar{\beta}^2$.

En effectuant ensuite la moyenne par rapport à toutes les valeurs possibles des M et des M' et compte tenu des relations (8) et (9), on obtient comme valeur moyenne $\bar{\bar{\alpha}}^2 + \bar{\bar{\beta}}^2$ de $\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2$

$$\bar{\bar{\alpha}}^2 + \bar{\bar{\beta}}^2 = \frac{1}{H^2} \sum F_\rho \left\{1 + \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + b(p^2+q^2)}\right]^2\right\}. \tag{22}$$

Comme le nombre des termes compris sous le signe somme est très grand et que la probabilité d'en rencontrer un dans le volume $dp\,dq\,dr$ est partout simplement égale à $dp\,dq\,dr$, on peut remplacer le signe somme par une intégrale et en effectuant le changement de variable : $p = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $q = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $r = \rho\cos\varphi$, $dp\,dq\,dr = \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta$, on constate que les variables se séparent et en intégrant par rapport à θ, il vient

$$\bar{\bar{\alpha}}^2 + \bar{\bar{\beta}}^2 = \frac{1}{H^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_\rho \left\{1 + \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + b(p^2+q^2)}\right]^2\right\} dp\,dq\,dr = \frac{4\pi G}{H^2}\int_0^\infty \rho^2 F_\rho\, d\rho, \tag{23}$$

où G est l'intégrale définie

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{(1 + b\sin^2\varphi)^2}\right] \sin\varphi\, d\varphi, \tag{24}$$

qu'un calcul élémentaire donne égale à

$$\begin{aligned} G = 1 &+ \frac{1}{2(b+1)} \\ &+ \frac{1}{2(b+1)^2}\sqrt{\frac{b+1}{b}} \operatorname{argth}\sqrt{\frac{b}{b+1}}. \end{aligned} \tag{25}$$

D'autre part, la même transformation de somme en intégrale appliquée à la somme ΣF_ρ donne

$$\sum F_\rho = 4\pi \int_0^\infty \rho^2 F_\rho\, d\rho. \tag{26}$$

Finalement en substituant l'expression (23) dans l'équation (11) et compte tenu des relations (26) et (14), on aboutit à la loi d'approche suivante où G est donné par l'équation (25) avec b égal à $\frac{4\pi\mathcal{J}_s}{H}$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left(1 - \frac{8K^2}{105\mathcal{J}_s^2 H^2}\frac{G}{2}\right). \tag{27}$$

9. **Discussion de la loi d'approche** (27). — Supposons d'abord que le champ appliqué soit très grand ; dans ce cas b est très petit et l'on trouve qu'en négligeant les termes du second ordre en b, $\frac{G}{2}$ se

réduit à $\frac{1}{\left(1+\frac{b}{3}\right)^2}$. La loi (27) devient alors

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_s\left[1 - \frac{8K^2}{105\,\mathcal{J}_s^2\left(H+\frac{4}{3}\pi\mathcal{J}_s\right)^2}\right]. \qquad (28)$$

On constate alors que les interactions entre les cristallites ont pour effet d'ajouter au champ appliqué un champ égal à $\frac{4}{3}\pi\mathcal{J}_s$; on reconnaît là le terme classique de Lorentz qu'un raisonnement sommaire nous avait donné plus haut. Mais, du point de vue pratique, il est impossible de se placer dans des conditions où la formule (28) soit valable : en effet, comme pour le fer $4\pi\mathcal{J}_s$ est déjà égal à 21 500, il faut atteindre 100 000 œrsteds pour que b, à la rigueur, puisse être considéré comme petit. On sait au contraire que, dans l'étude expérimentale de la loi d'approche en $\frac{1}{H^2}$, les champs utilisés ne dépassent pas 2000 œrsteds. Dans ces conditions, b doit plutôt être considéré comme grand. Le calcul numérique de l'expression (25) montre que $G:2$, égal à 0,5 quand $\frac{1}{b}$ est nul, croît à peu près linéairement avec $\frac{1}{b}$ jusqu'à $\frac{1}{b} = 0{,}3$. C'est ainsi qu'on obtient les chiffres du tableau suivant :

TABLEAU.

$\frac{1}{b}$....	0,022	0,050	0,116	0,276
$\frac{G}{2}$....	0,506	0,513	0,531	0,576

en se limitant au domaine accessible à l'expérience. Dans cet intervalle, G varie assez peu avec H pour que la loi d'approche réelle puisse être confondue en première approximation avec une loi rigoureuse en $\frac{1}{H^2}$, conformément à l'expérience, mais le coefficient du terme en $\frac{1}{H^2}$ est sensiblement deux fois plus petit que celui que l'on obtient en négligeant les interactions.

Dans les mesures sur un fil polycristallin de nickel qui ont été exposées précédemment (§ 5), le domaine d'étude de la loi d'approche en $\frac{1}{H^2}$ s'étendait de $H = 150$ à $H = 750$ œrsteds : $\frac{1}{b}$ variait donc de 0,024 à 0,1 et la valeur moyenne correspondante de $\frac{G}{2}$, d'après le tableau, était d'environ 0,515. Le coefficient du terme en $\frac{1}{H^2}$ ayant été trouvé égal à 290, on en déduit d'après la formule (27), $K = 4{,}3.10^4$ ergs : cm³, pour $t = 27°$ C. A cette même température, les mesures de Brukhatov et Kirensky [10] sur un monocristal donnent $K = 4{,}16.10^4$ ergs: cm³. L'accord entre ces deux valeurs est excellent.

10. **Conclusions.** — Ainsi, en ce qui concerne le nickel, l'introduction des interactions entre les cristallites conduit à une formule qui s'accorde avec les résultats expérimentaux.

Inversement, il semble qu'on puisse utiliser la formule (27) pour déduire de la loi d'approche la constante d'anisotropie K; à titre de première approximation, on pourra poser $G = 1$, c'est-à-dire utiliser la formule d'Akulov-Becker, mais avec un coefficient deux fois plus petit.

On peut également déduire K de la mesure de l'énergie d'aimantation, en suivant la méthode exposée dans le paragraphe 4, mais cette méthode paraît moins sûre et moins commode.

D'une manière générale, il sera bon de s'assurer, en utilisant les rayons X par exemple, que la substance est réellement isotrope et que les axes cristallins sont effectivement répartis au hasard, ce qui n'est pas toujours le cas des fils étirés. Il faut, en outre, que la substance soit aussi bien débarrassée que possible de tensions internes et ne contienne ni cavités ni inclusions non magnétiques : en effet, comme nous l'avons montré antérieurement [8], la présence des cavités perturbe profondément la loi d'approche. Ces précautions étant prises, il semble qu'on puisse tirer un bon parti des mesures sur les polycristaux, dans l'étude de l'anisotropie magnétique des substances cubiques.

(10) Brukhatov et Kirensky, *Physik Z. Sowjetunion*, 1937, 12, p. 602.

Manuscrit reçu le 3 mars 1948.

SUR LE CALCUL DES BASES RAYONNANTES

Par MAURICE PARODI et GEORGES PIRCHER.

Sommaire. — Dans cette étude, les auteurs donnent, en s'appuyant sur les propriétés du produit de composition, d'usage courant en calcul symbolique, une méthode de calcul de bases rayonnantes ayant des maxima secondaires très faibles vis-à-vis du maximum principal.

De nombreux travaux ont été effectués en Acoustique et en Radioélectricité en vue de déterminer des bases d'émission ou de réception ayant, dans une direction de plan déterminée, un maximum principal aussi aigu que possible et des maxima secondaires négligeables devant ce dernier, parmi lesquels il faut citer ceux de Menges [1] et de Shelkunoff [2].

Nous nous proposons de montrer que le calcul symbolique permet, en ayant recours à la notion de produit de composition, de donner une solution du problème.

1. **Introduction.** — Considérons une base d'émission linéaire résultant de la distribution continue sur une longueur finie ou infinie de centres d'émission vibrants en phase (*fig.* 1).

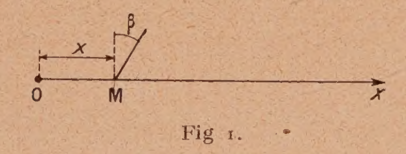


Fig 1.

L'amplitude de la vibration résultante à l'infini dans une direction faisant un angle β avec la normale à la direction du groupement (ou directivité de la base) a pour expression

$$A(\beta) = \left| \int_0^{+\infty} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\beta} f(x)\, dx \right|, \qquad (1)$$

$f(x)$ étant l'amplitude de la vibration émise au point d'abscisse x (fonction de répartition), cette dernière étant comptée à partir de l'une des extrémités de la base, λ la longueur d'onde et j le symbole des imaginaires.

Si l'on compare l'écriture (1) à celle qui donne le module de la transformée de Laplace $\varphi(p)$ de la fonction $f(x)$

$$|\varphi(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx \right|,$$

il apparaît que $A(\beta)$ est égale au module de $\varphi(p)$ quand on y fait $p = -j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\beta$.

Les tables de correspondances symboliques permettent donc de déterminer la directivité d'une base linéaire ayant une fonction de répartition donnée.

Nous pouvons remarquer que la fonction de répartition $f(x)$ peut, au lieu de caractériser l'amplitude au point d'abscisse x d'une distribution linéaire, représenter la largeur comptée perpendiculairement à Ox, d'une base plane continue dont tous les points vibrent en phase avec la même amplitude; dans ces conditions,

$$A(\beta) = \left| \varphi\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\beta\right) \right|$$

représente la directivité de la base dans la direction de plans perpendiculaires à sa surface et de traces parallèles à Ox.

Soit, par exemple, une base plane rectangulaire de largeur b et de longueur a (*fig.* 2); $f(x)$ est nulle quand x est extérieur à l'intervalle (0, a) et égale à b quand x est intérieur à cet intervalle.

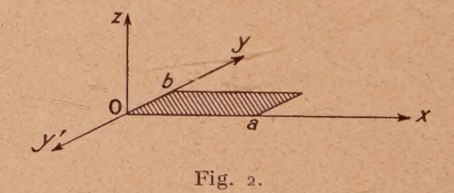


Fig. 2.

Proposons-nous de déterminer la directivité $A(\beta)$ de cette base dans le plan XOZ.

La fonction $f(x)$ a pour transformée de Laplace

$$b\,\frac{1 - e^{-pa}}{p}$$

et la directivité s'écrit, d'après ce qui précède,

$$A(\beta) = b \left| \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\beta}}{-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\beta} \right|$$

(1) *Akustische Zeits.*, 1941, **6**, p. 90.
(2) *Bell. Syst. tech. Journ.*, 1943, **22**, p. 80.

et un calcul simple donne le résultat classique

$$A(\beta) = ab \frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\beta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin\beta}{\lambda}}.$$

Considérons de même une base circulaire de rayon R (*fig.* 3) et cherchons sa directivité $A(\beta)$ dans le plan XOZ.

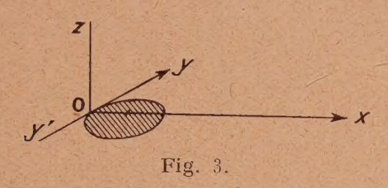


Fig. 3.

La fonction de répartition est égale à $\sqrt{2Rx - x^2}$ pour $0 < x < 2R$ et nulle partout ailleurs. L'image de $\sqrt{2Rx - x^2}$ est (³)

$$\varphi(p) = \pi \frac{R}{p} e^{-pR} I_1(pR).$$

I_1 étant la fonction de Bessel imaginaire du premier ordre, on a donc

$$A(\beta) = \pi R \left| \frac{1}{-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\beta} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}R\sin\beta} I_1\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}R\sin\beta\right) \right|.$$

Compte tenu de ce que $I_1(t) = jJ_1(-jt)$, il vient

$$A(\beta) = \pi R^2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\sin\beta\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda}\sin\beta}$$

résultat bien connu.

Il est à noter que la position de la base le long de l'axe des x n'intervient pas dans le résultat; une translation de valeur τ le long de l'axe des x se manifeste, en effet, dans l'image de la fonction de répartition par la présence d'un multiplicateur de la forme $e^{-\tau p}$ dont le module est égal à l'unité avec la valeur particulière que prend p dans les problèmes que nous étudions.

Plus généralement, on peut remarquer, qu'étant donnée une base de fonction de répartition $f(x)$ d'image $\varphi(p)$, toute fonction

$$\varphi(p)\,\theta(p)$$

est l'image de la fonction de répartition $F(x)$ d'une distribution ayant même directivité que la base précédemment envisagée si $|\theta(p)| = 1$ pour

$$p = -j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\beta.$$

(³) P. Humbert et Mc Lachlan, *Formulaire pour le calcul symbolique*, p. 14 (Gauthier-Villars, Paris, 1941).

Soit, par exemple, un rectangle de hauteur b et de longueur a, comptée parallèlement à Ox; l'image de sa fonction de répartition est

$$b\frac{1 - e^{-pa}}{p}.$$

Prenons $\theta(p) = e^{-\frac{\alpha}{p}}$ (α réel), qui est bien telle que $|\theta(p)| = 1$ pour $p = -j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\beta$.

La fonction de répartition $F(x)$ d'une distribution ayant même directivité que le rectangle dans le plan de tracé Ox a pour image

$$b\frac{1-e^{-pa}}{p} e^{-\frac{\alpha}{p}} = b\frac{e^{-\frac{\alpha}{p}}}{p} - b\,e^{-pa}\frac{e^{-\frac{\alpha}{p}}}{p}.$$

Or,

$$\frac{e^{-\frac{\alpha}{p}}}{p} \subset J_0(2\sqrt{\alpha x}),$$

donc

$$F(x) = \begin{cases} bJ_0(2\sqrt{\alpha x}) & \text{pour } 0 < x < a, \\ b\left\{J_0(2\sqrt{\alpha x}) - J_0\left(2\sqrt{\alpha(x-a)}\right)\right\} & \\ \quad\text{pour } a < x < +\infty. \end{cases}$$

On obtient une distribution semi-infinie.

2. **Détermination de bases planes ayant des propriétés directives données.** — Supposons que l'on se soit donné une base de fonction de répartition $f(x)$ et de directivité $A(\beta)$ connues et que l'on veuille déterminer la base plane ayant pour directivité $A(\beta)^n$ (n entier positif), ce qui aura pour effet d'affiner le maximum principal (pris égal à l'unité) et de diminuer l'importance des maxima secondaires.

Il suffira de chercher la fonction $\varphi(p)$ qui correspond à $A(\beta)$ et qui n'est autre que la transformée de Laplace de $f(x)$. D'après le théorème du produit de composition, la fonction de répartition de la base qui correspond à la directivité $A(\beta)^n$ sera

$$\overset{\star}{f(x)}\,n,$$

$\star$ étant le symbole du produit de composition.

Soit, par exemple, la base rectangulaire de longueur a et de largeur b dont nous avons déterminé précédemment la directivité $A(\beta)$ et cherchons la forme de la base possédant une directivité $A(\beta)^2$. Sa fonction de répartition aura pour image

$$b^2\left(\frac{1-e^{-pa}}{p}\right)^2 = b^2\left(\frac{1}{p^2} + \frac{e^{-2ap}}{p^2} - \frac{2e^{-ap}}{p^2}\right).$$

En remontant aux originaux, on voit que la fonction de répartition de la base cherchée est

$$f(x) = \begin{cases} b^2 x & \text{pour } 0 < x < a, \\ b^2(-x+2a) & \text{pour } a < x < 2a, \\ 0 & \text{pour } 2a < x < +\infty. \end{cases}$$

La base a la forme d'un triangle isocèle de hauteur b^2a et dont la base, parallèle à Ox, a pour longueur $2a$.

On aurait pu de même chercher la forme de la base ayant la directivité $A(\beta)^3$. L'image de sa fonction de répartition est

$$\varphi(p) = b^3\left(\frac{1-e^{-pa}}{p}\right)^3 = b^3\left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^3}e^{-pa} + \frac{3}{p^3}e^{-2pa} - \frac{1}{p^3}e^{-3pa}\right)$$

et l'on a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b^3x^2}{2} & \text{pour} \quad 0 < x < a, \\ \dfrac{b^3}{2}(-2x^2+6ax-3a^2) & \text{pour} \quad a < x < 2a, \\ \dfrac{b^3}{2}(x^2-6ax+9a^2) & \text{pour} \quad 2a < x < 3a, \\ 0 & \text{pour} \quad 3a < x < +\infty, \end{cases}$$

La base est limitée par l'axe des x et un contour formé d'arcs de paraboles, ce contour étant symétrique par rapport à la droite $x = \frac{3}{2}a$.

On aurait pu également se donner n bases de fonctions de répartition $f_k(x)$ et de directivités $A_k(\beta)$ connues ($k = 1, 2, \ldots, n$) et chercher la fonction de répartition d'un groupement de directivité $\prod_1^n A_k(\beta)$.

La fonction de répartition de la base cherchée est

$$\prod_1^n \overset{*}{f_k}(x),$$

toujours par application du théorème du produit de composition.

Soient, par exemple, deux bases rectangulaires de largeur b et b' et de longueur a et a' ($a' > a$).

Les fonctions de répartition de ces bases ont respectivement pour images

$$b\frac{1-e^{-pa}}{p}, \qquad b'\frac{1-e^{-pa'}}{p}$$

et l'image de la fonction de répartition de la base cherchée s'écrit

$$bb'\frac{[1-e^{-pa}-e^{-pa'}+e^{-p(a+a')}]}{p^2}.$$

Cette fonction $f(x)$ s'écrit donc

$$(x) = \begin{cases} bb'x & \text{pour} \quad 0 < x < a, \\ bb'a & \text{pour} \quad a < x < a', \\ bb'(-x+a+a') & \text{pour} \quad a' < x < a+a', \\ 0 & \text{pour} \quad a+a' < x < +\infty \end{cases}$$

et la base cherchée a la forme d'un trapèze de tracé facile.

3. **Généralisation**. — Plus généralement considérons un groupement constitué par n bases planes rectangulaires identiques A, équidistantes et disposées comme l'indique la figure 4, tous leurs points vibrants en phase.

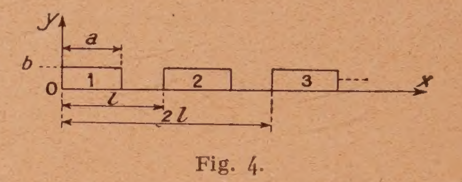


Fig. 4.

Les divers rectangles se déduisant chacun du précédent par une translation parallèle à OX de valeur l, l'image de la fonction de répartition de ce groupement relative au plan de trace OX est

$$\varphi(p) = b\left\{\frac{1-e^{-pa}}{p} + e^{-pl}\frac{1-e^{-pa}}{p} + \ldots + e^{-p(n-1)l}\frac{1-e^{-pa}}{p}\right\}$$
$$= b\frac{1-e^{-pa}}{p}[1+e^{-pl}+\ldots+e^{-p(n-1)l}].$$

La directivité $A(\beta)$ du groupement dans le plan de trace OX en résulte immédiatement; il vient

$$A(\beta) = b\left|\frac{1-e^{-pa}}{p}\frac{e^{-nlp}-1}{e^{-lp}-1}\right|;$$

soit

$$A(\beta) = ab\frac{\sin\left(\dfrac{\pi a\sin\beta}{\lambda}\right)}{\dfrac{\pi a\sin\beta}{\lambda}}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi ln\sin\beta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi l\sin\beta}{\lambda}\right)}.$$

Toujours dans le but d'obtenir une meilleure directivité, supposons que l'on veuille déterminer la structure du groupement qui aura pour directivité une puissance donnée, m, de celle du groupement initial dans le plan de trace OX. L'image de sa fonction de répartition sera

$$\psi(p) = \varphi(p)^m = b^m\left(\frac{1-e^{-pa}}{p}\right)^m \times [1+e^{-pl}+\ldots+e^{-p(n-1)l}]^m.$$

Le premier terme du produit qui figure dans l'expression de $\varphi(p)$ n'est autre que l'image de la fonction de répartition d'une base A' ayant, dans le plan de trace OX, une directivité égale à la puissance m de celle de l'un des rectangles qui constituent le groupement initial.

Le second terme est de la forme

$$\sum_{k=0}^{k=m(n-1)} \alpha_k e^{-pkl},$$

les α_k étant les coefficients du développement du polynome

$$(1+x^2+\ldots+x^{n-1})^m.$$

On voit ainsi que la nouvelle base sera constituée par $1 + m(n - 1)$ éléments identiques à A′ qui se déduisent chacun du précédent, comme dans la base initiale, par une translation de valeur l parallèle à OX, leurs poids devant être pris égaux aux coefficients correspondants α_k.

A titre d'exemple, considérons une base à deux éléments A et cherchons la structure du groupement qui aura dans le plan de trace OX, une directivité égale au carré de celle du groupement initial.

La fonction de répartition du groupement cherché aura pour image

$$b^2\left(\frac{1 - e^{-pa}}{p}\right)^2 (1 + 2\,e^{-pl} + e^{-2pl})$$

et il apparaît que ce groupement sera constitué par trois triangles isocèles identiques A′, de hauteur b^2a et de base $2a$, chacun d'eux se déduisant du précédent par une translation de valeur l parallèle à OX, les poids respectifs de ces bases partielles étant 1, 2 et 1.

On peut, pour tenir compte de ces poids, imaginer une base à quatre triangles ayant la structure figurée en 5.

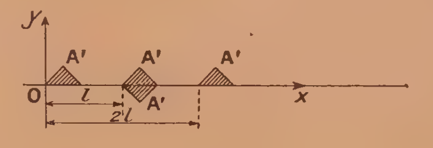


Fig. 5.

De ce résultat, il ressort, qu'étant donnée une base à deux éléments, identique à celle que nous venons de considérer, on peut, en prenant une valeur de m suffisamment élevée, déterminer un groupement linéaire comportant un plus grand nombre d'éléments et ayant une directivité aussi satisfaisante que l'on veut.

Ce dernier résultat est à rapprocher de celui obtenu par Shelkunoff dans son article précité.

Manuscrit reçu le 26 mars 1948.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME IX, JUIN 1948.

VARIATION THERMIQUE DU CHAMP COERCITIF DU COBALT DIVISÉ

Par L. WEIL, S. MARFOURE et F. BERTAUT.
Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal.

Sommaire. — On a étudié entre la température de l'air liquide et 300° la variation du champ coercitif de cobalt divisé, obtenu par réduction d'oxalate, de formiate et d'hydroxyde et comprimé en forme de bâtonnets. On a déterminé par un examen aux rayons X la structure et, en particulier, la proportion de phase hexagonale et cubique de chaque échantillon.

Pour tous les échantillons à forte proportion de phase hexagonale, le champ coercitif passe par un minimum au voisinage de 200° et a alors une valeur quatre fois plus petite que dans l'air liquide. Ce résultat est conforme à la théorie de M. Néel qui attribue le champ coercitif des poudres en partie à l'anisotropie magnétique qui, pour le cobalt hexagonal, s'annule au voisinage de 200° et croît quand la température décroît.

Nous avons montré, dans une publication antérieure [1] que le champ coercitif du nickel divisé, obtenu par réduction chimique et aggloméré vérifiait, d'une manière tout au moins qualitative, la théorie du champ coercitif des ferromagnétiques à grain fin développée par M. Néel [2, 3].

D'après cette théorie, le champ coercitif résulte, d'une part de l'*anisotropie de forme des grains*, d'autre part de l'*anisotropie magnétique de la substance*. Les valeurs qu'on peut s'attendre à trouver pour le cobalt hexagonal en grains fins isolés sont respectivement de l'ordre de $H_c^f = 0{,}26.\pi.\mathcal{J} = 1170$ gauss et $H_c^m = 0{,}95\,\frac{K}{\mathcal{J}} = 2900$ gauss (1) à température ordinaire, en prenant pour K la valeur $4{,}1 \cdot 10^6$ (4,6). Pour le cobalt cubique, H_c^f serait le même, tandis

(1) Formule inédite communiquée par M. Néel.

que H_c^m serait donné par la formule $0{,}64 \frac{K}{\mathcal{J}}$, où K est cette fois la constante d'anisotropie de la phase cubique qu'on peut situer, par extrapolation des valeurs obtenues pour les alliages Fe-Co et Ni-Co cubiques, au voisinage de 1.10^6, ce qui donne $H_c^m = 500$ gauss. Nous avons montré, dans le cas du fer et d'un ferro-cobalt à 30 pour 100 [5], dont l'anisotropie magnétique est faible, que le champ coercitif des comprimés est toujours bien inférieur à la valeur de H_c^f calculée. Il y a tout lieu de penser que le champ coercitif dû à l'anisotropie magnétique est également réduit lorsque l'on rapproche les grains au cours de l'agglomération.

Mais comment distinguer l'effet de la forme des grains de l'effet de l'anisotropie magnétique ? H_c^f varie lentement avec la température et s'annule au point de Curie, soit à 1100° pour le cobalt. H_c^m doit, au contraire, varier considérablement : on sait, en effet [6], que K augmente d'environ 50 pour 100 entre 12° et — 183° et s'annule pour changer de signe aux environs de 260°; à 390°, K reprend, par exemple au signe près, la même valeur qu'à 150°. En raison de la superposition de H_c^f et H_c^m, on doit donc s'attendre à trouver un *minimum non nul* du champ coercitif au voisinage de 260°.

Les échantillons. — Le principe de notre méthode de préparation dû à MM. Néel, Aubry et à l'un de nous est connu [8, 1] : on décompose et réduit un oxalate, un formiate ou un hydroxyde cobalteux dans l'hydrogène à basse température. La poudre obtenue est comprimée en bâtonnets. Ceux-ci sont recuits à une température un peu supérieure à celle qui est atteinte au cours de l'étude de la variation thermique.

Nous avons opéré également sur des échantillons de cobalt avec 5 pour 100 de zinc. L'oxalate utilisé pour les obtenir a été préparé par précipitation d'une solution de sel de cobalt additionné de 5 pour 100 de sel de zinc. Nous recherchions l'influence du zinc sur la structure.

La structure du cobalt. — On connaît le cobalt sous deux formes cristallines, l'une hexagonale (ε), stable au-dessous de 400°, l'autre cubique (γ), stable à haute température. La transformation $\varepsilon \rightarrow \gamma$ s'accompagne d'un faible effet thermique (62 cal par atome-gramme [13]) et est lente; il est relativement facile d'obtenir du cobalt cubique à la température ordinaire par un refroidissement rapide par exemple. De plus, *la plupart des impuretés abaissent le point de transformation*. On a montré [9] qu'il suffisait de 0,08 pour 100 de carbone pour l'abaisser à 142°. Edwards et Lipson [10] ont même mis en évidence que, pour du cobalt pulvérisé mécaniquement en grains de moins de 50 μ, il était *impossible*, même par des recuits prolongés — au-dessous de la température de recristallisation toutefois — *de dépasser une teneur de 50 pour 100* en phase ε. Enfin, d'autres auteurs ont signalé que, d'une façon générale, les tensions internes dues à l'écrouissage [11] ou les inclusions [12] stabilisaient la phase cubique et pouvaient *empêcher un rétablissement*, même partiel, de *la phase hexagonale* au cours du refroidissement.

Il était donc indispensable de s'assurer de la structure des échantillons étudiés pour pouvoir interpréter leurs propriétés magnétiques.

La structure des échantillons. — Nous avons fait des diagrammes de Debye-Scherrer des divers échantillons étudiés. En employant la méthode de focalisation de J. C. Brentano, nous avons déduit la proportion de cobalt hexagonal de la mesure du rapport des intensités de deux raies; l'une $(10\bar{1}1)$ est spécifique de la forme hexagonale; l'autre correspond soit à (0002) dans la forme hexagonale, soit à (111) dans la forme cubique.

On sait [14] que l'on passe de la phase hexagonale compacte à la phase cubique par un simple glissement, parallèle à un axe binaire, d'une longueur $\frac{a}{\sqrt{3}}$, des plans (0001) qui deviennent des plans (111) du cube. Or Edwards, Lipson et Wilson [15] ont montré que, *dans la phase hexagonale*, des séquences de plans (0001) peuvent être décalées l'une par rapport à l'autre par un glissement semblable. Tout se passe donc pour certains plans réticulaires tels que (0001) et, d'une façon générale, tous les plans communs au cube et à la phase hexagonale, comme si l'on avait affaire à un grain d'une certaine dimension, alors que, pour les autres, les largeurs des raies de diffraction correspondent à des *feuillets* d'épaisseur bien plus petite.

On peut ainsi, par l'étude des largeurs de diverses raies, évaluer la largeur et l'épaisseur moyenne des feuillets. Nous avons trouvé, pour les échantillons 1 à 3 contenant essentiellement la phase hexagonale, des épaisseurs de 30 Å pour des largeurs de 250 Å environ, la hauteur de l'empilement étant de l'ordre de 250 Å.

Le tableau ci-dessous résume les observations faites sur les divers échantillons et leur mode de préparation.

Variation thermique du champ coercitif. — Le Tableau II ci-contre donne les valeurs du champ coercitif pour les dix échantillons à diverses températures dans l'ordre où elles ont été obtenues par la méthode antérieurement décrite [1]. Nous avons reporté les résultats sur les figures 1 et 2.

Pour les échantillons 1 à 3 et 7 à 10, d'une façon très marquée, pour les échantillons 4 et 5 d'une façon moins prononcée, le champ coercitif passe par un minimum au voisinage de 200°. Ce minimum n'existe pas pour le cobalt cubique.

TABLEAU I.

Échantillon.	Préparation.	Recuit.	Structure.
1......	Réduction d'oxalate pur, 50 min à 340°	Sous vide, 75 min à 300°	1/2 hexagonal
2......	»	» 48 heures »	2/3 »
3......	»	» 15 jours »	2/3 »
4......	Réduction d'oxalate de Co + 5 pour 100 Zn à 350°	» 2 h 45 à 500°	Peu d'hexagonal
5......	Id., à 340°	» 2 h 15 à 300°	»
6......	Id., à 300°	» à 300°	Cubique ; pas d'hexagonal décelable
7......	Réduction de formiate pur, 50 min à 320°	Dans l'hydrogène, 1 heure à 320°	Peu de cubique
8......	Réduction d'hydroxyde cobalteux, 50 min à 320°	Id., 2 heures à 350°	» (*)
9......	Id., à 350°	»	»
10......	Id., à 450°	»	»

(*) Avant recuit cet échantillon était hexagonal pur.

TABLEAU II.

1.		2.		3.		4.		5.	
t.	H_c.	*t.*	H_c.	*t.*	H_c.	*t.*	H_c.	*t.*	H_c.
—190...	640	—190...	706	—190...	663	—190...	178	—190...	400
— 79...	433	— 79...	471	13...	340	15...	104	— 79...	296
13...	322	13...	322	75...	265	45...	100	15...	245
66...	265	71...	235	118...	225	58...	98	59...	235
104...	246	115...	203	145...	203	75...	98	71...	234,4
128...	230	149...	182	162...	256	88...	98	90...	234
184...	215	189...	172	175...	193	100...	99	122...	234,5
232...	220	238...	179	182...	187,5	118...	101	131...	235
284...	235	298...	200	202...	183	140...	102,5	157...	236
298...	235	248...	181	252...	186	158...	104	228...	237
		218...	172	230...	185	208...	109	102...	234
		164...	175	202...	183	258...	113	81...	234
				170...	191	310...	115,5	15...	244
				123...	220	358...	117		

6.		7.		8.		9.		10.	
t.	H_c.	*t.*	H_c.	*t.*	H_c.	*t.*	H_c.	*t.*	H_c.
—190...	790	319...	197,5	13...	250	13...	239	13...	208
15...	557	270...	190	53...	197,5	63...	182	65...	152,5
60...	554	211...	183	108...	153,5	126...	128,2	123...	124
82...	548	171...	186,5	211...	125	166...	112,5	186...	109,7
102...	548	121...	206	249...	130,5	214...	109,7	229...	106,5
145...	544	73...	238	309...	163,5	270...	120,5	265...	116,3
210...	535	13...	301,5	13...	247	364...	145	314...	128,5
290...	518	—190...	565	—190...	470,5	13...	242	13...	204
175...	540	— 79...	408	— 79...	354	—190...	510	—190...	412,5
105...	548	13...	300			— 79...	357,5	— 79...	298
15...	557								

Conclusion. — Le *minimum de champ coercitif* observé pour tous les échantillons à forte proportion de phase hexagonale est en accord avec la théorie. Il met bien en évidence la double origine du champ coercitif des poudres ferro-magnétiques : le minimum se produit près du point où la constante

d'anisotropie s'annule; ce minimum n'est pas nul parce que l'anisotropie de forme contribue au champ coercitif.

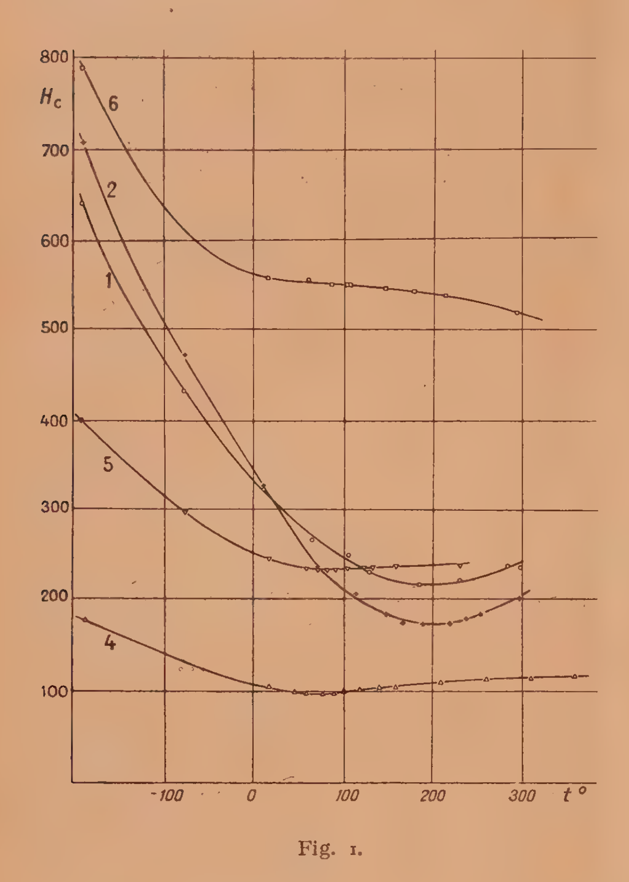


Fig. 1.

Pour l'échantillon 6, purement cubique aux rayons X, le minimum est remplacé par un point d'inflexion, dû peut-être à des traces de phase γ non décelées; d'ailleurs, pour le cobalt cubique, on ne sait rien de la variation thermique de K.

Le minimum a toujours lieu à une température nettement inférieure à 260°, alors que la superposition de H_c^f, décroissant régulièrement avec la température, à H_c^m devrait plutôt le décaler vers les températures élevées. Nous pensons que la variation thermique de K pour nos échantillons est différente de celle observée pour le cobalt massif. Tout se passe comme si la température où K s'annule était abaissée par les impuretés (carbone, oxygène, zinc, etc.), la structure feuilletée ou même simplement la finesse du grain. Ce résultat n'a rien de surprenant : le point de transformation $\gamma \rightarrow \varepsilon$ est lui-même abaissé par ces causes ainsi que le rappelle la persistance tout au moins partielle, à température ordinaire, de cobalt cubique dans nos échantillons, cependant que le *minimum de H_c se situe d'autant plus bas* que les *textures sont plus perturbées,* descendant, par exemple, à 100° pour les éprouvettes 4 et 5, contenant beaucoup d'impuretés et de γ.

Un véritable décalage dans la variation thermique de K permet également de comprendre l'augmentation extrêmement importante de H_c entre la température ambiante et celle de l'air liquide : à une augmentation de 50 pour 100 de K dans cet intervalle comme on l'a observée pour le métal massif ne saurait correspondre un doublement ou un triplement de champ coercitif comme nous l'avons observé pour nos échantillons.

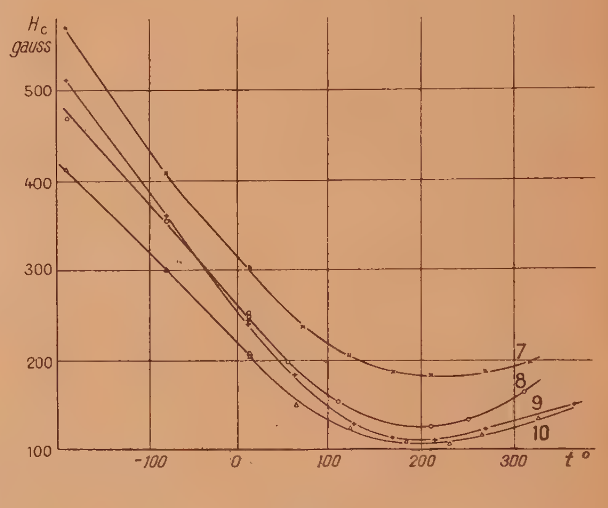


Fig. 2.

Reste à savoir *pourquoi les valeurs de H_c sont plus faibles* que celles qu'on s'attendait à trouver (moins de 400 au lieu de 2900 à température ambiante !) et pourquoi les valeurs pour la phase γ sont du même ordre, ou même plus grandes que celles pour la phase hexagonale. Les valeurs observées sont inférieures aux valeurs calculées en raison du rapprochement des grains comme nous l'avons déjà signalé plus haut. Quant au faible champ coercitif du cobalt hexagonal, il trouve sans doute son explication dans une micrographie électronique de J. T. Mc Cartney et R. B. Anderson : ces auteurs ont montré que les grains de cobalt hexagonal étaient de larges lames parallèles au plan (0001), groupés parallèlement et non orientés au hasard comme on aurait pu le penser *a priori*. Le fort champ démagnétisant parallèle à l'axe sénaire empêche, tout au moins en partie, celui-ci de jouer son rôle de direction de facile aimantation. On perd donc presque complètement le bénéfice de la forte anisotropie magnétique qui lui était associée, puisque, dans le plan de base, le cobalt est sensiblement isotrope [4].

Manuscrit reçu le 12 avril 1948.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. WEIL et S. MARFOURE, *J. de Physique*, 1947, 8e série, **8**, p. 358.
[2] L. NÉEL, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 1488.
[3] L. NÉEL, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 1550.
[4] R. BECKER et W. DÖRING, *Ferromagnetismus*, Springer, Berlin, 1939.
[5] L. WEIL, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, p. 229.
[6] K. HONDA et H. MASUMOTO, *Sci. Rep. Tokohu Univ.*, 1931, **20**, p. 323.
[7] R. FORRER, R. BAFFIE et P. FOURNIER, *J. de Physique*, 1945, 8e série, **6**, p. 50.
[8] Brevet français, Chambéry, 7 avril 1942.
[9] HOSHIMATO, *Kinzoky no Kenkyu*, 1932, **9**, p. 57; d'après HANSEN, *Aufbau der Zweistofflegierungen*, Springer, 1936.
[10] O. S. EDWARDS et H. LIPSON, *Tech. J. of Inst. of Metals*, 1943, p. 177.
[11] G. WASSERMANN, *Metallwirtschaft*, 1932, **11**, p. 61.
[12] R. FRICKE et H. MÜLLER, *Naturwissenschaften*, 1942, **30**, p. 439.
[13] U. DEHLINGER, *Z. f. Physik*, 1931, **68**, p. 535.
[14] BRAGG, *Crystalline State*, p. 144 (Bell, London, 1933).
[15] O. S. EDWARDS, H. LIPSON et A. J. C. WILSON, *Nature*, 1941, **148**, p. 165.
[16] J. T. MC CARTNEY et R. B. ANDERSON, *J. appl. Physics*, 1947, **18**, p. 902.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME IX, JUIN 1948.

SUR L'ÉTAT DES CONTRAINTES AUTOUR DES ACCROCHAGES DE LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ DES MÉTAUX

Par PIERRE LAURENT.
Chargé de Recherches du C. N. R. S.

Sommaire. — Rappel des propriétés plastiques des cristaux et des théories de Smekal, Becker et Taylor. En admettant que la déformation plastique est due à la formation, à la propagation et à la disparition de défauts du réseau cristallin ou accrochages, on obtient un bon accord avec les résultats expérimentaux. Cette théorie a été précédemment développée [3] en se donnant, *a priori*, la répartition des contraintes internes autour d'un accrochage; dans cette note, il est montré que l'hypothèse faite est en accord avec les conditions de l'équilibre élastique.

Les alliages étant constitués de cristaux, leurs propriétés dérivent des propriétés de ceux-ci et de leurs interactions. L'étude de la plasticité des cristaux uniques est ainsi un premier stade pour la compréhension des caractéristiques mécaniques.

Plasticité des cristaux uniques [1]. — Tant que les forces appliquées à un cristal sont faibles, les déformations suivent la loi de Hooke et le cristal reprend sa forme initiale quand on supprime les forces extérieures.

L'expérience montre que si l'importance des forces appliquées augmente, le cristal ne reprend plus sa forme initiale; on dit qu'il a subi des déformations plastiques. Celles-ci peuvent être de trois types :

a. déformation par translation;
b. maclage mécanique;
c. kinking ou pliage en genou.

Le premier mode de déformation est extrêmement général et de beaucoup le plus important; le maclage ne s'observe que sur certains types de cristaux, quand au kinking il semble encore exceptionnel.

Les déformations par translation sont dues à des glissements d'une partie du cristal par rapport à l'autre le long d'un plan T, cristallographiquement défini (plan de translation); dans ce plan, la direction de glissement est parallèle à une direction t également cristallographiquement déterminée (direction de translation). Si d est la distance de deux atomes voisins dans la direction t, la grandeur de la translation est toujours un multiple de d.

Si l'on enregistre des diagrammes de traction pour différentes orientations de l'axe de traction par rapport au réseau du cristal, on obtient des courbes très diverses et des limites élastiques très différentes. Mais on peut constater que le cisaillement agissant sur le plan de translation actif au

moment de l'apparition du premier glissement plastique est indépendant de l'orientation du réseau; telle est la loi du cisaillement critique de Schmid.

Si, au lieu d'envisager comme on le fait habituellement la variation de l'effort de traction en fonction de l'allongement, on considère la variation du cisaillement agissant dans la direction de translation en fonction de la valeur du glissement, on obtient ainsi la « courbe de consolidation » du métal indépendante de l'orientation du cristal; elle représente une caractéristique du métal considéré.

Théories de la plasticité cristalline. — Pour expliquer la résistance des cristaux, on peut chercher à calculer le travail nécessaire pour rompre les liaisons interatomiques; ce travail a été entrepris par Born. Toutefois, les valeurs obtenues étant mille fois plus élevées que les résultats expérimentaux et la validité du raisonnement de Born ne pouvant être mise en doute, il est nécessaire d'expliquer les faibles résistances observées en pratique. Les recherches entreprises dans cette voie ont donné naissance à diverses théories parmi lesquelles nous citerons :

1° La théorie de Smekal, qui admet l'existence de microfissures dans le cristal. Ces fissures provoquent des concentrations d'efforts entraînant localement le dépassement de la résistance théorique. Toutefois, étant donné les dimensions admissibles pour ces microfissures, on ne peut combler le fossé entre la résistance pratique et la résistance théorique de Born.

2° La théorie de Taylor, qui admet l'existence dans le réseau d'atomes dont les liaisons avec leurs voisins sont anormales; ceci constitue ce que l'on appelle une dislocation. Ces dislocations proviendraient d'un vice congénital du cristal. Sous l'effet d'une force extérieure relativement faible, cette dislocation peut se déplacer, ce qui entraîne un glissement relatif d'une maille d'une partie du cristal par rapport à l'autre. Cette théorie explique bien le mécanisme du glissement et l'existence du cisaillement critique, mais ne permet pas de comprendre l'influence de la température, ni de la vitesse de déformation.

3° La théorie de Becker qui fait appel non pas à une hétérogénéité de structure comme celle de Taylor, mais à l'hétérogénéité des énergies vibratoires des atomes. Si un atome possède une grande énergie, l'amplitude de ces vibrations est également grande par rapport à la distance réticulaire; aussi, suffira-t-il d'appliquer une faible force extérieure pour que cet atome quitte sa position d'équilibre normal et prenne la place d'un atome voisin. Si ce fait se répète tout le long d'un plan de glissement, il en résulte, pour l'ensemble du cristal, un glissement d'une maille.

Une synthèse de ces théories a été entreprise successivement par Orowan [4], par W.G. Burgers [2] et par Kochendorfer [5]; elle a permis d'expliquer l'effet de la température sur le cisaillement critique et sur la pente à l'origine des courbes de consolidation aux températures moyennes, ainsi que de calculer la courbe de consolidation de l'aluminium. Ces théories sont restées impuissantes pour retrouver les courbes de consolidation des cristaux hexagonaux et pour expliquer le fluage, la plasticité au zéro absolu, la constance du cisaillement critique et du coefficient de consolidation au voisinage du point de fusion, ainsi que la restauration et la stabilité de l'état déformé. La raison de ces difficultés est due, à notre avis, à ce que l'on a adopté comme un postulat des propriétés les dislocations proposées par Taylor.

Théorie des accrochages. — Dans cette théorie on admet, comme dans la théorie de Taylor que le glissement plastique résulte de la propagation à travers le cristal des défauts du réseau que nous appellerons des accrochages pour les distinguer des dislocations de Taylor; nous nous contenterons de résumer ici les bases de cette théorie [3]. Ces accrochages se forment à la limite du bloc mosaïque sous l'action combinée de l'agitation thermique et du cisaillement agissant sur le cristal; ils se propagent dans le plan de glissement parallèlement à la direction de glissement et viennent s'accumuler à l'autre extrémité du bloc mosaïque. Ces accrochages créent autour d'eux une perturbation du réseau, c'est-à-dire un champ de tensions internes qui, en s'opposant au cisaillement extérieur, est à l'origine de la consolidation du cristal. Au fur et à mesure que la déformation augmente, le nombre des accrochages accumulés croît, mais un certain nombre de ceux-ci est détruit par l'agitation thermique (restauration). La disparition d'un accrochage entraîne la disparition du champ des contraintes qu'il créait, mais ne modifie pas le glissement plastique que la propagation de cet accrochage a provoqué.

Contraintes autour d'un accrochage. — En développant cette théorie, on admet que les tensions internes créées par un accrochage s'annulent pratiquement à une certaine distance du centre de l'accrochage et que le cisaillement dans le plan de glissement s'oppose au cisaillement extérieur sur les atomes situés du côté d'où cet accrochage vient et s'ajoute au cisaillement extérieur sur les atomes situés du côté où il se dirige.

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas d'un cristal à deux dimensions et prenons comme origine des angles la demi-droite que vient de parcourir l'accrochage. Les hypothèses précédentes peuvent être satisfaites en admettant qu'en un point quelconque le cisaillement τ créé par l'accrochage est

égal à

$$\tau = \frac{K \cos\theta}{r^\alpha},$$

où r et θ sont les coordonnées polaires du point considéré en prenant comme origine la ligne de glissement, K et α des constantes. Nous supposerons, de plus, l'accrochage non pas dans un bloc mosaïque, mais dans un plan infini, c'est-à-dire que les composantes du champ de contraintes internes σ_r, σ_θ et τ s'annulent avec $\frac{1}{r}$.

Que peut-on dire du champ des déformations autour de l'accrochage ? J. M. Burgers [6] fait remarquer que, pour une dislocation, si à la distance r la composante du déplacement parallèle à un rayon polaire est u pour $\theta = 0$, il a la valeur $u + d$ pour $\theta = 2\pi$ (d étant le paramètre du réseau dans la direction de glissement); la composante u du déplacement est ainsi une fonction multiforme de l'angle polaire. Au contraire, la composante v du déplacement normal au rayon polaire est une fonction uniforme. Burgers étudie alors un état de contrainte élastique satisfaisant à ces conditions. Ce point de vue est incompatible avec les propriétés attribuées aux accrochages. En effet, lorsque dans un état de tensions élastiques on fait disparaître les contraintes en tous les points, les déformations élastiques disparaissent *ipso facto*. Or, nous avons, au contraire, supposé que, lorsqu'un accrochage disparaît (restauration) et que le champ de tensions s'annule, le glissement de la partie supérieure du cristal par rapport à la partie inférieure reste égal à d. Donc le déplacement u, fonction multiforme de θ ne peut alors être considéré comme un déplacement élastique. Donc, pour $\theta = 2\pi$, le déplacement total se compose d'un déplacement non élastique d et d'une partie élastique (que nous désignerons par u fonction uniforme de θ ; le déplacement non élastique est, au contraire, une fonction multiforme de θ).

Le déplacement d résulte du mécanisme propre de propagation de l'accrochage, nous ne le considérerons pas ici. Le champ de contraintes élastiques autour d'un accrochage doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° le cisaillement le long du rayon polaire est

$$\tau = \frac{K \cos\theta}{r^\alpha}; \tag{1}$$

2° les composantes des contraintes s'annulent avec $\frac{1}{r}$.

3° les déplacements élastiques sont des fonctions uniformes de θ et s'annulent avec $\frac{1}{r}$.

En coordonnées polaires, les équations de l'équilibre élastique sont, en l'absence de forces massiques [7] :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau) + \tau = 0. \tag{3}$$

Par suite de l'hypothèse (1) faite sur τ, l'équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = \frac{K \cos\theta}{r^\alpha}(\alpha - 2),$$

ce qui donne

$$\sigma_\theta = (\alpha - 2)\frac{K \sin\theta}{r^\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(r), \tag{4}$$

où $f(r)$ est une fonction de r seul encore indéterminée. Portons cette valeur de σ_θ dans l'équation (2); il vient après intégration

$$\sigma_r = \frac{f(r)}{r} + \frac{1}{r} g(\theta) - \frac{K \sin\theta}{r^\alpha},$$

où $g(\theta)$ est une fonction de θ seul encore indéterminée. L'état des contraintes est ainsi

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \frac{K\cos\theta}{r^\alpha}, \qquad \sigma_r = \frac{f(r)}{r} + \frac{1}{r}g(\theta) - \frac{K\sin\theta}{r^\alpha}, \\ &r_\theta = (\alpha - 2)\frac{K\sin\theta}{r^\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(r). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Pour déterminer $f(r)$ et $g(\theta)$, il faudrait écrire que les fonctions σ_r, σ_θ et τ satisfont à l'équation de comptabilité; il est plus simple de calculer directement les déplacements u et v.

Détermination des déplacements autour d'un accrochage. — On sait que les déformations ε_r, ε_θ et γ sont liées aux contraintes par les relations

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \qquad E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r, \qquad E\gamma = 2(1+\nu)\tau,$$

où E et ν sont le module de Young et le coefficient de Poisson, tandis que les déformations sont reliées aux déplacements u et v par les relations

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ &\gamma = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Portons les valeurs (5) dans ces équations; on trouve alors

$$Eu = \int \frac{f(r)}{r}\,\mathrm{d}r + g(\theta)\,\mathrm{Ln}\, r - \nu f(r) + \frac{K\sin\theta}{r^{\alpha-1}}\,\frac{1 + \nu(\alpha - 2)}{\alpha - 1} + h(\theta), \tag{7}$$

où $h(\theta)$ est une fonction indéterminée encore de θ seul. Remarquons que u ne peut tendre vers zéro avec $\frac{1}{r}$ pour toutes les valeurs de θ que si

$$h(\theta) = g(\theta) = 0$$

et si $\frac{f(r)}{r}$ et $f(r)$ tendent au zéro avec $\frac{1}{r}$. La deuxième équation (6) s'écrit, dans ces conditions,

$$E v = \frac{K \cos \theta}{r^{\alpha-1}} \left(\frac{1-\nu}{\alpha - 1} - \alpha + 2 \right) + \theta \left(r \frac{d}{dr} f(r) - \int \frac{f(r)}{r} dr \right) + l(r), \quad (8)$$

où $l(r)$ est une fonction encore indéterminée de r seul, s'annulant avec $\frac{1}{r}$. Mais, puisque v doit être une fonction uniforme de θ, il faut que l'on ait

$$r \frac{d}{dr} f(r) - \int \frac{f(r)}{r} dr = 0; \quad (9)$$

cette équation différentielle du type de Fuchs a pour solution une fonction de la forme $\frac{a}{r} + br$ (où a et b sont des constantes). D'après les conditions imposées à $f(r)$, on a $b = 0$. Portons les valeurs (7) et (8) dans la troisième équation (6) en tenant compte de (9); on obtient une expression contenant des termes en $\frac{K \cos \theta}{r^\alpha}$ et des termes dépendant de r seulement; elle ne peut être satisfaite que si les deux termes sont séparément nuls, c'est-à-dire à la fois

$$r \frac{d}{dr} l(r) - l(r) = 0, \qquad \frac{K \cos \theta}{r^\alpha} (\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0; \quad (10)$$

la première équation n'admet que la solution $l = 0$, qui s'annule avec $\frac{1}{r}$: la deuxième donne soit $\alpha = 3$, soit $\alpha = -1$. La solution $\alpha = -1$ ne satisfait pas au problème. On a finalement, pour le champ de contraintes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \frac{a}{r^2} - \frac{K \sin \theta}{r^3}, \qquad \sigma_\theta = -\frac{a}{r^2} + \frac{K \sin \theta}{r^3}, \\ \tau = \frac{K \cos \theta}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Remarquons que, dans le raisonnement précédent, nous avons admis que l'accrochage était situé dans un plan indéfini. Notre calcul n'est donc plus valable en toute rigueur pour les accrochages situés dans les blocs mosaïques des bords du cristal [1]. D'autre part, nous avons implicitement assimilé le cristal au milieu continu en écrivant les équations (2), (3) et (6); ce fait est certainement inexact dans le domaine voisin du centre de l'accrochage.

Dans la suite du raisonnement, nous supposerons $a = 0$, cette hypothèse ne se justifie d'ailleurs que par la simplification des calculs qu'elle entraîne.

[1] Ce cas pourrait se traiter par un calcul analogue, au lieu d'admettre que le champ de tension s'accumulant avec, il suffirait de considérer qu'il disparaît sur la frontière du cristal.

Calcul de la consolidation atomique. — Les résultats précédents nous conduisent à reprendre le calcul de la consolidation atomique fait précédemment [3]. Ainsi que nous l'avons rappelé, les accrochages accumulés créent, au point de formation des accrochages, un cisaillement τ_i qui s'oppose au cisaillement extérieur τ. Si τ_0 est le cisaillement nécessaire à la formation des accrochages, on aura

$$\tau - \tau_i = \tau_0. \quad (12)$$

τ_i est, par définition, la consolidation résultant de la déformation déjà imposée au cristal.

Ce cisaillement antagoniste qui s'exerce au point de formation A des accrochages (*fig.* 1), peut se

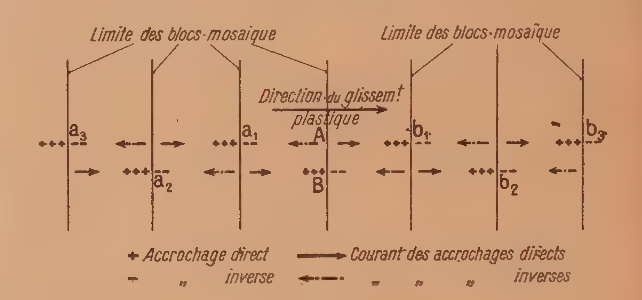


Fig. 1. — Accumulation des accrochages aux limites des blocs mosaïques.

décomposer en deux parties :

1° Cisaillement dû aux accrochages accumulés en a_i et b_j;

2° Cisaillement dû aux accrochages accumulés en B.

Avant d'évaluer séparément ces deux termes, rappelons qu'il existe deux sortes d'accrochages, se déplaçant en sens inverse sous l'effet du cisaillement extérieur, les accrochages directs et les accrochages inverses.

1° *Cisaillement antagoniste dû aux accrochages accumulés en a_i et b_j.* — Soient N_d le nombre des accrochages directs et N_i celui des accrochages inverses accumulés en a_i et b_j. D'après ce qui précède les accrochages directs accumulés en a_i créent, en A, un cisaillement positif et ceux accumulés en b_j, un cisaillement négatif; inversement, les accrochages inverses accumulés en a_i créent, en A, un cisaillement négatif et ceux accumulés en b_j un cisaillement positif. Par suite, le cisaillement antagoniste résultant de ces divers accrochages est

$$(N_d - N_i) \frac{K}{L^3} \left[\sum_1^m \frac{1}{i^3} + \sum_1^p \frac{1}{j^3} \right], \quad (13)$$

m et p étant les nombres de blocs mosaïques situés à droite et à gauche de la frontière considérée,

L la dimension du bloc mosaïque. Les deux sommes entre crochets étant rapidement convergentes, on a pratiquement

$$(\tau_i)_1 = (N_d - N_i)\frac{2,6\,K}{L^3}, \tag{14}$$

$(\tau_i)_1$ est ainsi indépendant des nombres m et p, c'est-à-dire des dimensions du cristal. Pour les blocs mosaïques situés au voisinage des bords du cristal, le calcul précédent n'est pas valable, mais nous n'envisagerons pas ici l'influence des dimensions du cristal.

2° *Cisaillement antagoniste dû aux accrochages accumulés au voisinage de* B. — Pour calculer $(\tau_i)_2$, déterminons d'abord le cisaillement créé en A (*fig.* 2) dans la direction de glissement par un accrochage d'abscisse x. D'après une formule classique en théorie de l'élasticité donnant le cisaillement dans une direction quelconque, on a

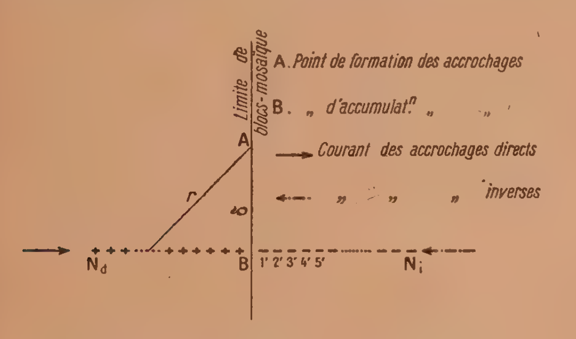


Fig. 2. — Disposition des accrochages à la limite de deux blocs mosaïques.

$$\tau = \frac{K\cos\theta}{r^3}(\cos 2\theta - \sin 2\theta). \tag{15}$$

Considérons d'abord le cisaillement antagoniste créé par les accrochages directs accumulés au voisinage du point B. Si ε_d est la distance moyenne de deux accrochages directs, le cisaillement dû aux accrochages directs est

$$(\tau_1)_2^d = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\theta_1} \frac{K\,dx}{\varepsilon_d}\,\frac{\cos\theta}{r^3}(\cos 2\theta - \sin 2\theta), \tag{16}$$

en désignant par θ_1 l'angle polaire correspondant à l'accrochage situé à l'extrémité du domaine d'accumulation. Il est évident que r et θ sont liés par la condition

$$r\sin(\theta - \pi) = \delta \quad \text{ou} \quad r = -\frac{\delta}{\sin\theta}, \tag{17}$$

d'autre part, on a

$$(dx)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2, \qquad dx = -\frac{\delta}{\sin^2\theta}\,d\theta. \tag{18}$$

D'où l'expression de $(\tau_i)_2^d$

$$(\tau_i)_2^d = \frac{K}{4\varepsilon_d\delta^2}\left[\frac{3}{2}\pi + \frac{\sin^2 2\theta_1}{2} - \theta_1 + \frac{\sin 4\theta_1}{4}\right]. \tag{19}$$

Pour les accrochages inverses, on aurait de même

$$(\tau_i)_2^i = \frac{K}{4\varepsilon_i\delta^2}\left[\frac{3}{2}\pi + \frac{\sin^2 2\theta'_1}{2} - \theta''_1 + \frac{\sin 4\theta'_1}{4}\right].$$

Si les domaines d'accumulation sont suffisamment étendus par rapport à δ (et nous considérerons qu'il en est toujours ainsi), on a θ et $\theta' \sim \pi$,

$$(\tau_i)_2^d = \frac{K\pi}{8\delta^2\varepsilon_d}, \qquad (\tau_i)_2^i = \frac{K\pi}{8\delta^2\varepsilon_i},$$

d'où

$$(\tau_i)_2 = \frac{K}{\delta^2}\,\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{\varepsilon_d} - \frac{1}{\varepsilon_i}\right). \tag{20}$$

Si nous admettons, pour simplifier, que les domaines occupés par les accrochages directs et inverses sont les mêmes ($N_d\,\varepsilon_d = N_i\,\varepsilon_i = L_0$), nous aurons alors

$$(\tau_i)_2 = \frac{\pi}{8}\,\frac{K}{\delta^2 L_0}(N_d - N_i). \tag{21}$$

D'où, finalement, nous avons entre le nombre d'accrochages et le cisaillement antagoniste la relation suivante :

$$\tau_i = (\tau_i)_1 + (\tau_i)_2 = K\left(\frac{2,34}{L^3} + \frac{\pi}{8L_0\delta^2}\right)(N_d - N_i).$$

Cette équation est de la forme $\tau_i = \beta(N_d - N_i)$ qui avait été admise par Kochendorfer et que nous avons utilisée systématiquement dans la théorie de la plasticité cristalline.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1948.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Pour plus de détails sur ce point, *voir*, par exemple : SCHMID et BOES, *Kristallplastizität*, Berlin, 1935. — SEITZ, *The Physics of Metals*, New York, 1943. — BURGERS, dans HOUWINK, *Elastizität, Plastizität und Strükür der Materien*, Dresde, 1939. — Référence [2].
[2] P. LAURENT, J. VALEUR et C. BOGROFF, *Les bases de la résistance mécanique des métaux*, Dunod, 1947.
[3] P. LAURENT, *Revue de Métallurgie*, 1945, p. 79.
[4] OROWAN, *Z. f. Physik*, 1934, **89**, p. 634.
[5] KOCHENDORFER, *Plastischen Eigenschaften von Kristallen*, Berlin, 1942.
[6] J. M. BURGERS, *Proc. Phys. Soc.*, 1940, **52**, p. 23.
[7] TIMOSENKO, *Théorie de l'Élasticité*, Paris, 1936, p. 56.

EFFICACITÉ DES COMPTEURS A RAYONS γ

Par GÉRARD-ANDRÉ RENARD.
Laboratoire de Chimie nucléaire, Collège de France.

Sommaire. — Établissement de la courbe d'efficacité des compteurs à rayons γ, à paroi d'Al, Cu, Au, dans le domaine d'énergie 0,3-3 MeV, par la méthode des coïncidences et des mesures absolues annexes. Utilisation des divers rayonnements des nuclides : ^{52}V, ^{28}Al, ^{198}Au, ^{61}Cu, Th C''. La connaissance de l'efficacité peut donner une présomption de la validité d'un schéma de désintégration encore imparfaitement établi.

Introduction. — La méthode des coïncidences est fréquemment utilisée pour établir le schéma des niveaux d'un nuclide et la connaissance des efficacités des compteurs pour les divers rayonnements permet de vérifier telle ou telle hypothèse d'un schéma inconnu ou de choisir entre divers schémas proposés. Le but de ce travail est la détermination expérimentale de la courbe d'efficacité des compteurs à rayons γ, en fonction de la nature des parois et de l'énergie des rayons γ dans un domaine allant de 0,3 à 3 MeV.

Nous définirons tout d'abord l'efficacité d'un compteur à rayons γ. Si un rayon γ traverse le compteur, nous appellerons efficacité et désignerons par ε_γ la probabilité qu'a ce quantum de donner lieu à une décharge. Soit une source radioactive émettant N rayons monochromatiques par unité de temps et donnant n coups par unité de temps dans le compteur considéré, nous appellerons rendement et désignerons par ρ_γ le rapport

$$\frac{n}{N} = \rho_\gamma.$$

Nous pouvons relier le rendement à l'efficacité par la formule

$$\rho_\gamma = \varepsilon_\gamma k \omega,$$

où ω est l'angle solide effectif et k le facteur d'absorption dans les parois du compteur; ce facteur est de la forme

$$k = e^{-\frac{\mu}{\rho} m};$$

$\frac{\mu}{\rho}$ est le coefficient d'absorption massique et m l'épaisseur moyenne traversée en g : cm^2.

Le rendement est obtenu à partir de mesures en coïncidences et les formules employées seront développées dans le cas de chaque corps; ω a été déterminé à partir du rayonnement du Ra E, à l'aide de compteurs à rayons β, en extrapolant les courbes d'absorption dans l'Al obtenues avec un compteur à paroi de 1/10e mm d'Al, un compteur à fenêtre de 19 μ d'Al et un compteur sans paroi (*fig.* 1).

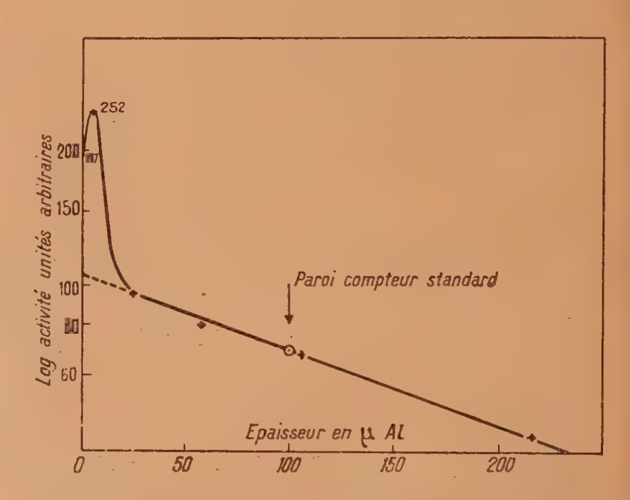


Fig. 1. — Absorption dans l'aluminium du rayonnement d'une source de Ra D + Ra E + Ra F en équilibre; utilisation du compteur sans paroi.

La masse superficielle moyenne traversée m a été déterminée par le rayonnement de dématérialisation du nuclide ^{61}Cu et le rayonnement de 2,6 MeV du Th C'', en utilisant divers compteurs à coque de Cu, d'épaisseur variant entre 0,1 et 2 mm; m a été trouvé égal à la masse superficielle de la paroi du compteur.

Appareillage. — *Compteurs.* — Nous avons utilisé des compteurs cylindriques à coque d'Al, de Cu et d'Au ayant 40 mm de longueur de fil et un diamètre intérieur de 17 mm (sauf le compteur à coque de Cu de 2 mm d'épaisseur et celui d'or de 0,5 mm d'épaisseur qui ont un diamètre intérieur de 16 mm); ils sont remplis avec un mélange

de 10 pour 100 d'alcool et 90 pour 100 d'argon, jusqu'à une pression totale de 10 cm de Hg. Les coques sont, soit en Al : épaisseur 0,1 et 1 mm, soit en Cu : épaisseur 0,1, 0,2, 0,5, 1, 1,5, 2 mm, soit en Au : feuilles d'Au, d'épaisseur 5 μ, 10 μ et 0,5 mm enroulées dans un compteur d'Al de 0,1 mm d'épaisseur.

Pour la détermination de l'angle solide effectif, par extrapolation de la courbe d'absorption du Ra *E*, nous avons utilisé un compteur en laiton de mêmes dimensions portant une fenêtre de 1 cm² fermée par une feuille d'Al de 19 μ. Le compteur sans paroi, utilisé pour la même mesure, est un compteur forme cloche, non fermé, de 20 mm de diamètre, l'extrémité libre du fil est située à 20 mm de la source, l'ensemble est placé dans un dessiccateur rempli du mélange utilisé pour les compteurs précédents. Un disque porte-écrans intercepte le rayonnement émis de la source vers le compteur, le disque porte sur sa circonférence trois masselottes de fer doux qui permettent de commander sa rotation extérieurement par un aimant. Le disque porte six écrans ayant comme épaisseur respectivement : 218, 104, 58, 21, 6 et 0 μ d'Al (*fig.* 2).

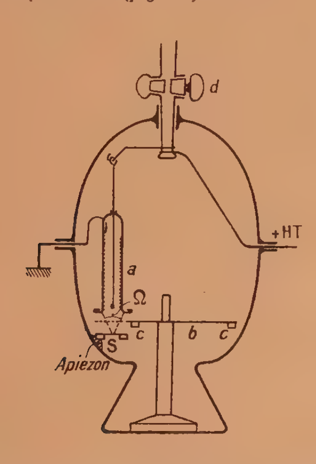


Fig. 2. — Compteur sans paroi.
a, compteur; *b*, disque porte-écrans; *c*, masselottes de fer doux; *d*, robinet permettant le pompage et le remplissage du compteur; *e*, source.

Supports de compteurs. — Les compteurs peuvent être fixés en différents logements situés à des distances fixes de la source, permettant diverses combinaisons tout en évitant des erreurs de repérage des distances (*fig.* 3).

Sources. — Les sources sont soit déposées sur une feuille d'acétate de cellulose (épaisseur ~ 8 μ), tendue sur un cadre de plexiglass, soit, dans le cas de ^{28}Al et ^{198}Au, collées directement sur le cadre de plexiglass par une trace d'une solution d'acétate de cellulose dans l'acétone.

Appareils de numération. — Les compteurs sont reliés à un amplificateur à quatre coïncidences, à une échelle de 1000 et à une échelle de 100 construits par le Commissariat à l'Énergie atomique.

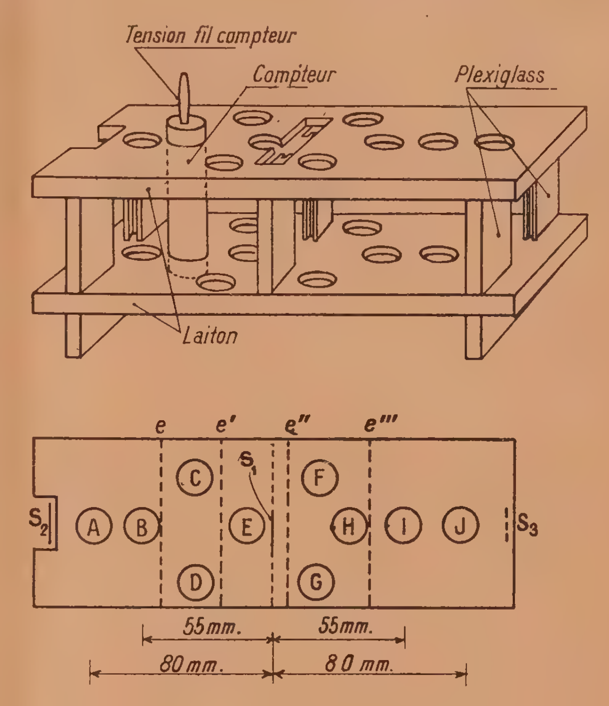


Fig. 3. — Support compteurs.
S_1, S_2, S_3, emplacements possibles des sources; A, B, C, D, E F, G, H, I, J, emplacements possibles des compteurs; *e*, *e'*, *e''*, etc., emplacements possibles des écrans.

Ces appareils permettent la mesure simultanée du nombre d'impulsions dans chaque compteur et du nombre de coïncidences. Le pouvoir de résolution est de l'ordre de $0,5.10^{-6}$ s en coïncidences doubles, pour toutes les combinaisons de compteurs deux à deux. Le taux de 10 000 impulsions : mn dans un compteur n'a pas été dépassé (sauf dans les mesures sur ^{198}Au) dans le but d'éviter les pertes dues au temps mort du compteur. De ce fait, les coïncidences fortuites sont négligeables (sauf dans les mesures sur ^{198}Au où elles ont été évaluées). Le bon fonctionnement des diverses combinaisons de compteurs en coïncidences a été testé par la méthode décrite par Norling [1]. Ce test a été effectué à diverses reprises au cours des mesures qui ont, de plus, été encadrées par des mesures d'étalons.

Mesures. — Nous avons utilisé des corps dont le schéma de désintégration a déjà été étudié :

1° ^{52}V, sous forme de V_2O_5, pour l'énergie de 1,46 MeV;

2° ^{28}Al, pour l'énergie de 1,8 MeV;

3° ^{24}Na, sous forme de CO_3Na_2, pour les énergies de 1,38 et 2,76 MeV;

4° ^{198}Au, pour les énergies de 0,3 et 0,4 MeV;

5° ^{61}Cu, sous forme de CuS, pour l'énergie du rayonnement d'annihilation de 0,51 MeV.

D'autre part, des mesures directes ont été effectuées avec :

1° Th C'', d'une source de R Th, pour l'énergie de 2,6 MeV;

2° ^{61}Cu, pour le rayonnement de 0,51 MeV.

Les résultats des mesures sont donnés dans le Tableau I.

TABLEAU I.

Nuclide.		Énergie (en MeV).	Efficacité ($\times 10^3$). Cu.	Al.	Au.
^{52}V....		1,46	10,3 ±0,5	11 ±1	12,6±1
^{28}Al...		1,8	12,8 ±0,7	–	13,5±0,5
^{24}Na...		Total	27,5 ±0,5	28,8±0,4	29 ±2
		2,76	19	18,8	18 ±1
		1,38	8,5	10	11 ±1
^{198}Au..		Total	4,70±0,1	4 ±0,1	28 ±2
		0,3	2	1,1	14 ±1[a]
		0,4	2,70	2,9	
^{61}Cu...		0,510[b]	3,2 ±0,1	3,7±0,2	10 ±1
		0,510[c]	3,5 ±0,2	3,9±0,3	7[d]
Th C''..		2,62	18,4 ±0,5	18,4±0,5	18 ±0,5

[a] Valeur moyenne. — [b] Mesure en coïncidences. — [c] Mesure directe. — [d] Valeur estimée.

Vanadium. — Nous avons utilisé un porteur de 2 mg de V_2O_5 en poudre, irradié pendant 10 mn par neutrons lents. Le schéma de désintégration du nuclide ^{52}V formé a été étudié par T. Yuasa [2], J. Martelly [3] et par R. Bouchez et nous-mêmes [4]; on peut le représenter par le schéma 4 *a*. Dans la

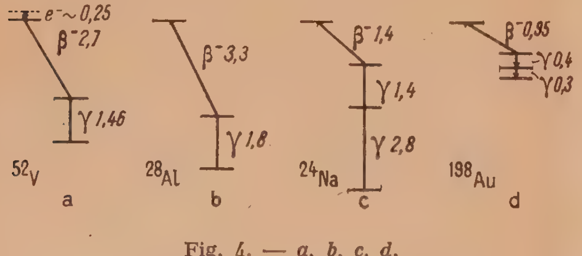


Fig. 4. — *a*, *b*, *c*, *d*.
a, ^{52}V; *b*, ^{28}Al; *c*, ^{24}Na; *d*, ^{198}Au.

mesure des coïncidences $\beta - \gamma$, en utilisant un compteur à rayons β dont la paroi arrête les électrons de la transition isomérique (3/10e mm d'Al) les négatons du spectre β seront seuls comptés. La proportion de rayons γ donnant des décharges dans le compteur à rayons β est de l'ordre de 1 pour 100 et peut être négligée à la précision des mesures; d'autre part, l'épaisseur du compteur à rayons γ est suffisante pour arrêter tous les électrons. On peut écrire

$$N_\beta = N\rho_\beta,$$
$$N_\gamma = N\rho_\gamma,$$
$$N_{\beta-\gamma} = N\rho_\beta\rho_\gamma,$$

N_β, N_γ, $N_{\beta-\gamma}$, N, étant respectivement le nombre d'impulsions provenant du compteur à rayons β, du compteur à rayons γ, en coïncidences et le nombre de désintégrations de la source pendant l'unité de temps; ρ_β, ρ_γ les rendements des compteurs β et γ. Nous avons, avec les notations de l'introduction,

$$\rho_\gamma = \omega_\gamma \varepsilon_\gamma k,$$

d'où nous pouvons tirer la valeur de l'efficacité.

Aluminium. — Le porteur est une feuille d'Al de 3 cm sur 1 cm, de 4×10^{-2} mm d'épaisseur, pur à 0,997, irradiée pendant 10 mn par neutrons lents. Le schéma de désintégration du nuclide ^{28}Al peut être représenté par le schéma 4 *b* [5] et le rendement et l'efficacité sont obtenus en utilisant les mêmes formules que dans le cas de ^{52}V.

Sodium. — Nous avons irradié du CO_3Na_2 par des deutons de 6,8 MeV pendant des temps allant de 1 à 5 h. Le produit est dissous et neutralisé et une goutte de la solution déposée sur un porteur d'acétate de cellulose, constitue la source après séchage à l'étuve (1). La source décroît avec une période pure de 14,8 h à 1 pour 100 près. En admettant le schéma proposé par Elliot et Alburger [6-8], schéma 4 *c*, et en négligeant les électrons de conversion, nous obtenons une valeur moyenne du rendement, d'où, le point obtenu pour le ^{52}V servant de comparaison, nous pouvons tirer les valeurs de l'efficacité pour les énergies de 1,38 et 2,76 MeV. Nous avons utilisé pour déterminer le rendement les formules (avec les notations habituelles) :

$$N_\beta = N\rho_\beta,$$
$$N_\gamma = N\omega_\gamma(\varepsilon k + \varepsilon' k') = N\rho_{\gamma\,\text{total}},$$
$$N_{\gamma\gamma} = N\rho_\beta\omega_\gamma(\varepsilon k + \varepsilon' k'),$$

ε, ε', k, k', étant respectivement les valeurs de l'efficacité et du facteur de transmission pour les raies de 1,38 et 2,76 MeV.

Or. — Nous avons utilisé différentes feuilles d'or de 3 cm sur 1 cm et de 1 cm sur 1 cm d'épaisseurs 10, 5 et 0,5 μ, irradiées par neutrons lents ou par deutons pendant des temps variant de quelques heures à un mois. Nous avons trouvé, dans tous les cas, une période pure de 66 h à 1 pour 100 près. Le schéma le plus probable d'après nos mesures en coïncidences [17] est celui représenté par le schéma 4 *d*.

(1) Nous remercions M. P. Süe et ses collaborateurs de la préparation des sources de ^{24}Na.

En négligeant les électrons de conversion et la possibilité d'une raie γ faible de 2,5 MeV, on obtient le rendement en utilisant les mêmes formules que dans le cas de ^{24}Na.

Cuivre. — Nous avons utilisé la réaction Ni (*d*, *p*) Cu par la méthode décrite par Savel [9], pour obtenir le nuclide ^{61}Cu. Après séparation chimique et centrifugation, le précipité de CuS est déposé sur un porteur d'acétate de cellulose. L'activité du produit mesurée quelques heures après la fin de l'irradiation décroît avec une période pure de 3,4 h à 2,5 pour 100 près. La source est entourée d'une feuille de Pb de 1 mm d'épaisseur; les β^+ sont ainsi arrêtés. En faisant l'hypothèse, que deux rayons γ de 510 keV sont émis à chaque annihilation, et qu'ils sont émis dans deux directions diamétralement opposées, les mesures en coïncidences γ — γ permettent de remonter au nombre de désintégrations et à l'efficacité. On a les formules

$$N_{\gamma_1} = 2N\omega\varepsilon_\gamma k_1,$$
$$N_{\gamma_2} = 2N\omega\varepsilon_\gamma k_2,$$
$$N_{\gamma-\gamma} = N\omega\varepsilon_\gamma^2 k_1 k_2,$$

N, N_{γ_1}, N_{γ_2} $N_{\gamma-\gamma}$, étant respectivement les nombres : de désintégrations, de décharges dans le compteur 1 et le compteur 2 et en coïncidences; ω l'angle solide effectif des deux compteurs (le même pour les deux compteurs); les autres notations sont conformes à celles déjà mentionnées dans l'introduction. Remarquons que la corrélation angulaire des deux γ donne des formules différentes de celles établies dans le cas général des coïncidences γ — γ.

Mesures absolues directes. — Nous voulons parler des mesures absolues que nous avons effectuées à titre de contrôle avec le rayonnement du Th *C″* et le rayonnement d'annihilation du nuclide ^{61}Cu.

Thorium C″. — Nous avons utilisé le rayonnement, filtré par 3,5 cm de Pb, d'une source de R Th équivalente à 0,126 mg de Ra préparée et étalonnée par la méthode du grand condensateur à l'Institut du Radium (²).

Cuivre. — Le nuclide ^{61}Cu a été préparé par la même méthode que précédemment, nous nous sommes servis du même échantillon que celui employé dans les mesures en coïncidences; nous avons utilisé un compteur à rayons β en Al de 1/10e de millimètre d'épaisseur et le compteur sans paroi précédemment décrit, pour déterminer l'absorption dans la paroi et en utilisant un diaphragme canalisant un faisceau de β^+, nous avons pu déterminer le nombre de désintégrations de la source. De là, on obtient directement le rendement et l'efficacité. Cette méthode est peu précise, ce qui peut expliquer les différences avec les résultats obtenus par la méthode des coïncidences. D'autre part, dans les mesures en coïncidences, nous avons supposé que le rayonnement d'annihilation n'est constitué que de quanta de 0,51 MeV, alors que la théorie prévoit un rayonnement de 1 MeV (de l'ordre de 10 pour 100 du rayonnement total dans le cas des éléments lourds), et que ce rayonnement a déjà été observé [10]. Des expériences sont en projet à ce sujet.

Résultats. — Nous avons comparé nos résultats (Tableau I) à ceux obtenus par Norling [1], Bradt et *al.* [11], Maier-Leibnitz [12] et Dunworth [13], ainsi qu'aux résultats théoriques et semi-théoriques de Von Droste [14], Yukava et Sakata [15] et N. Marty [16]. Les courbes sont dessinées (*fig.* 5, 6 et 7) pour le Cu, l'Al et l'Au.

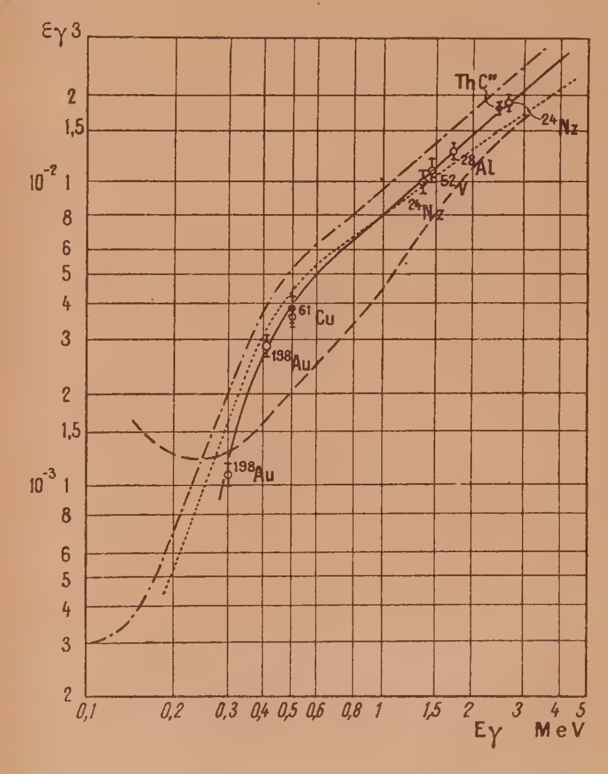


Fig. 5. — Efficacité des compteurs à coque d'Aluminium. Maier-Leibnitz, — · — · — · —; Bradt et *al.*, - - - - - -; N. Marty, · · · · · · ; Renard, ○, mesures en coïncidences; ●, mesures absolues directes.

Le décalement systématique de certaines courbes provient vraisemblablement de différences entre les dispositifs expérimentaux. La figure 8 reproduit nos résultats quant aux efficacités pour les divers matériaux utilisés. La figure 9 représente les rapports $\frac{\varepsilon k}{\varepsilon' k'} = \frac{\rho}{\rho'}$ en fonction de l'énergie du rayon-

(²) Nous remercions M. G. Bouissières et Mlle Chamié pour la préparation et l'étalonnage de cette source.

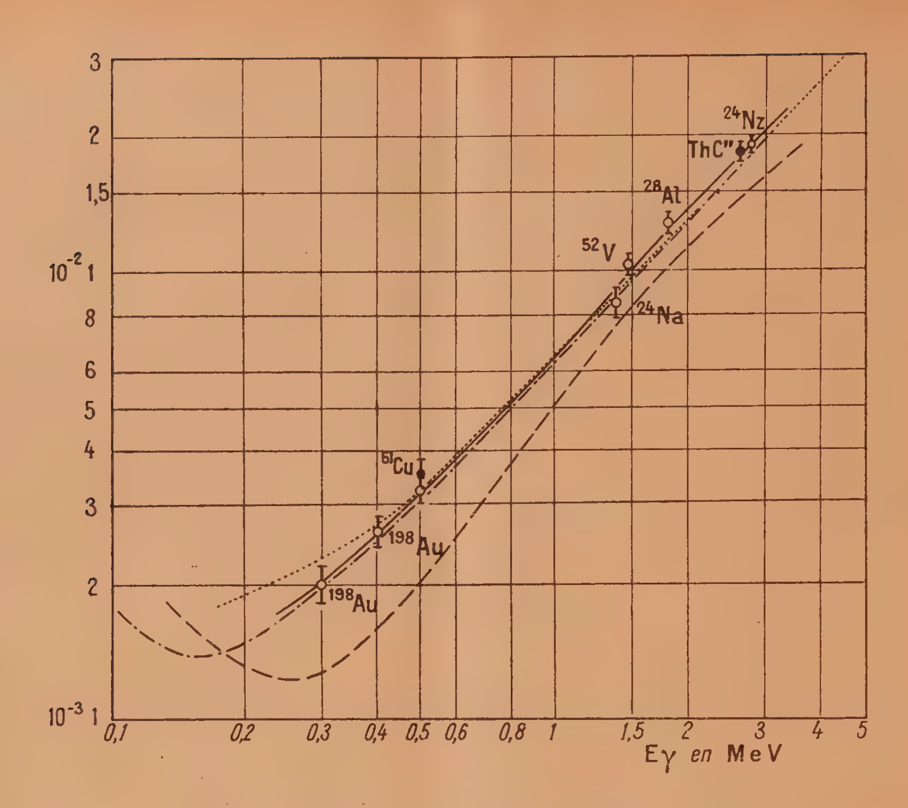


Fig. 6. — Efficacité des compteurs à coque de cuivre.
Maier-Leibnitz, —•—•—•—; Bradt et *al.*, - - - - - - -; N. Marty, • • • • • • • ; Renard, o, mesures en coïncidences; •, mesures absolues directes.

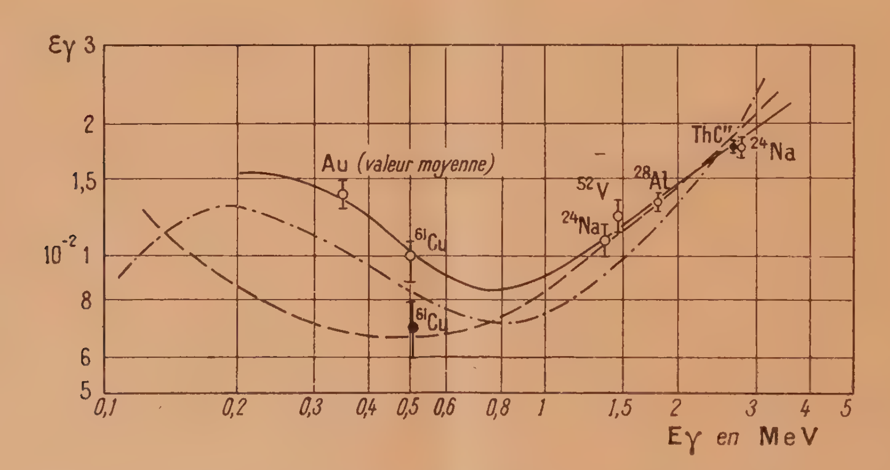


Fig. 7. — Efficacité des compteurs à coques de Pb et d'Au.
Pb : Maier-Leibnitz, — • — • — • ; Bradt et *al.*, - - - - -. Au : Renard, ————, o mesures en coïncidences; •, mesures absolues directes.

nement; les facteurs k et k' sont calculés pour une épaisseur de paroi égale au parcours maximum des électrons secondaires pouvant être créés dans cette paroi; nous avons utilisé la valeur moyenne déduite des relations parcours-énergie des rayons β, de Coryell (³) et de Flammersfeld [18], ainsi

(³) $E_\beta = \frac{R + 0{,}094}{0{,}526}$ (formule donnée au cours d'une causerie).

que d'une courbe provenant de Princeton (4).

Ces courbes ont été établies en vue de vérifier les efficacités obtenues par la méthode des coïncidences,

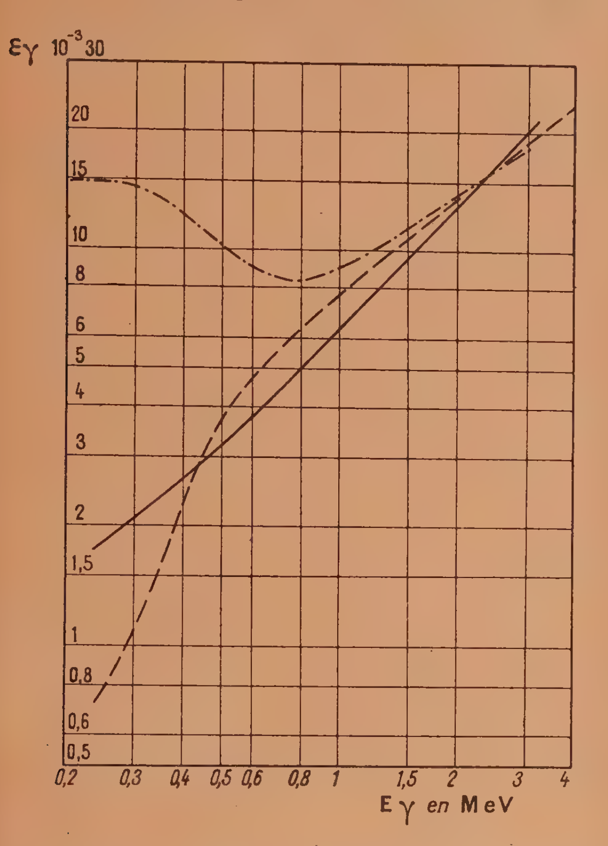


Fig. 8. — Efficacité des compteurs à rayons γ.
- - - - - - - - - - -, coque d'Al;
——————, coque de Cu;
—.—.—.—.—, coque d'Au.

dans l'étude d'un nuclide dont le schéma de désintégration n'est pas encore définitivement établi ou est controversé. Ces courbes se sont révélées utiles pour notre étude du schéma de désintégration de ^{198}Au [17]. Dans cette étude, nous avons supposé la continuité de l'efficacité avec l'énergie; en fait, dans la région utilisée, l'éventualité d'une discontinuité est improbable théoriquement, ce qui justifie notre manière de procéder.

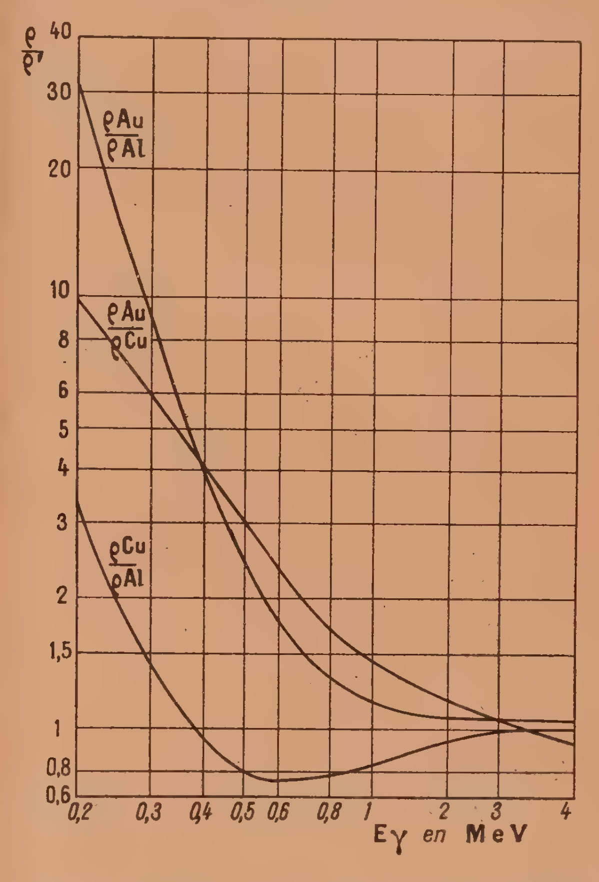


Fig. 9. — Rapports des rendements des divers compteurs en fonction de l'énergie des rayons γ; pour une épaisseur de paroi correspondant au parcours maximum des électrons secondaires.

Nous tenons à remercier M. le Professeur F. Joliot, qui a dirigé notre travail et nous a aidé de précieux conseils. Nous exprimons notre gratitude au C.N.R.S. pour l'allocation qu'il nous a fournie.

(4) Exemplaire fourni par M. Magnan.

Manuscrit reçu le 21 mai 1948.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. Norling, *Ark. f. Math. o. Fys.*, 1941, **27** A.
[2] T. Yuasa, *Thèse*, Paris, 1944.
[3] J. Martelly, *Thèse*, Paris, 1945.
[4] R. Bouchez et G.-A. Renard, *J. de Physique et Radium*, 1947, **8**, p. 289.
[5] E. Bleuler et W. Zünti, *Helv. Phys. Acta*, 1947, **20**, p. 195.
[6] L. G. Elliot, M. Deutsch et A. Roberts, *Phys. Rev.*, 1943, **63**, p. 386.
[7] M. L. Wiedenbeck, *Phys. Rev.*, 1947, **72**, p. 429.
[8] D. E. Alburger, *Phys. Rev.*, 1948, **73**, p. 344.
[9] P. Savel, *Cahier de Physique*, 1944, **19**, p. 39.
[10] F. Joliot, *C. R. Acad. Sc.*, 1934, **198**, p. 81.
[11] H. Bradt, P. C. Gugelot, O. Huber, H. Medicus, P, Preiswerk et P. Scherrer, *Helv. Phys. Acta*, 1946, **19**, p. 77.
[12] Maier-Leibnitz, *Z. Naturforschg.*, 1946, **1**, p. 243.
[13] J. V. Dunworth, *Rev. Sc. Instr.*, 1940, **11**, p. 167.
[14] Von Droste, *Z. f. Physik*, 1936, **100**, p. 529.
[15] H. Yukawa et S. Sakata, *Sci. Pap. Inst. Chem. Phys. Res. Tokyo*, 1937, **31**, p. 187.
[16] N. Marty, *J. de Physique et Radium*, 1946, 8, p. 29.
[17] G.-A. Renard, *C. R. Acad. Sc.*, 1948, 226, p. 1269.
[18] Flammersfeld, *Z. f. Naturforschg.*, 1947, **2** *a*, p. 86-9.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME IX, JUIN 1948.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CORPUSCULES DE SPIN $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ DANS LES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Par GÉRARD PETIAU.
Institut Henri-Poincaré.

Sommaire. — L'introduction dans l'équation d'ondes de l'électron de Dirac, représentant d'une façon générale, les corpuscules de spin $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$, d'un terme d'interaction électromagnétique s'exerçant directement par les champs et non plus seulement par les potentiels, permet de représenter un corpuscule possédant un moment magnétique propre non lié à l'existence de la charge.

Nous examinons ici quelques propriétés de ce corpuscule que l'on peut déduire de l'équation d'ondes. Après avoir défini un opérateur vitesse généralisé, nous montrons comment l'introduction d'un tenseur d'impulsion généralisé permet d'étudier les forces résultant de l'action du champ sur le corpuscule, celles-ci se décomposant en une force correspondant à la force de Lorentz classique et en une force due au moment électromagnétique propre ou force de spin dont nous discutons la possibilité de mise en évidence.

Les résultats obtenus sont ensuite retrouvés dans l'étude de l'approximation non relativiste de l'équation d'ondes considérée, d'abord dans le cas du champ électromagnétique quelconque puis, plus en détail, dans le cas du champ électrique central.

1. La théorie de l'électron relativiste de Dirac représente l'état du corpuscule de spin $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$ en l'absence de champ extérieur par les fonctions d'ondes ψ_k ($k = 1, 2, 3, 4$), solutions du système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre :

$$[p_0 + \mathbf{p}.\alpha + m_0 c \alpha_4]\psi_k = 0, \qquad (1)$$

où

$$p_0 = -i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

α, α_4 représentant un système de quatre matrices du quatrième rang, telles que

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Lorsque ce corpuscule portant une charge ε se trouve placé dans un champ électromagnétique caractérisé par les champs électrique et magnétique **E**, **H** et par les potentiels scalaire et vecteur A_0, **A**, l'équation d'ondes déterminant les fonctions ψ_k se déduit de (1) en remplaçant les opérateurs p_0, **p** par $p_0 + \frac{\varepsilon}{c}A_0$, $\mathbf{p} + \frac{\varepsilon}{c}\mathbf{A}$, ce qui revient à compléter l'équation (1) par l'expression invariante dans une transformation de Lorentz

$$\frac{\varepsilon}{c}[A_0 + \mathbf{A}.\alpha] \qquad (2)$$

et à écrire celle-ci sous la forme

$$\left[p_0 + \mathbf{p}.\alpha + \frac{\varepsilon}{c}[A_0 + \mathbf{A}.\alpha] + m_0 c\alpha_4\right]\psi_k = 0. \qquad (3)$$

L'interprétation de cette équation conduit à attribuer au corpuscule un moment cinétique propre ou spin et un moment électromagnétique propre auquel correspond l'énergie potentielle

$$-\frac{\varepsilon\hbar}{2m_0 c}[\mathbf{E}.\boldsymbol{\pi} + \mathbf{H}.\boldsymbol{\mu}] \qquad (4)$$

en désignant par $\boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\mu}$ les matrices vecteurs de composantes

$$\pi_p = i\alpha_p\alpha_4, \qquad \mu_p = \sigma_p\alpha_4 = i\alpha_q\alpha_r\alpha_4, \qquad \sigma_p = i\alpha_q\alpha_r$$
$$(p, q = 1, 2, 3).$$

Cependant, W. Pauli a montré (1) que l'expression invariante (4) pouvait également être introduite directement dans l'équation d'ondes (1) qui s'écrit alors

$$\left[p_0 + \mathbf{p}\alpha + \mu_0[\mathbf{E}.\boldsymbol{\pi} + \mathbf{H}.\boldsymbol{\mu}] + m_0 c\alpha_4\right]\psi_k = 0 \qquad (5)$$

et dont les solutions représentent les états d'un corpuscule non chargé mais possédant un moment magnétique propre μ_0.

Cette équation a été considérée depuis par de nombreux auteurs pour représenter le proton ou le neutron selon que l'on tient compte, simultanément ou non, des deux termes d'interaction (2) et (4). En particulier, cette équation a été utilisée dans des travaux récents de Caldirola (2), G. Breit (3), R. G. Sachs (4). Signalons, en outre, que H. Bethe (5) s'en est servi pour représenter le neutrino dans l'hypothèse où ce corpuscule non chargé, de masse

(1) W. PAULI, *Handbuch der Physik*, **24/1**, p. 233.

(2) CALDIROLA, Relativistic correction in calculating the magnetic moment of deuteron. *Phys. Rev.*, 1946, **69**, p. 608.

(3) G. BREIT, Relativistic corrections to magnetic moments of nuclear particles. *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 100-402.

(4) R. G. SACHS, On the magnetic moment of deuteron. *Phys. Rev.*, 1947, **72**, p. 91-98.

(5) H. BETHE, Ionisation power of a neutrino with moment magnetic. *Proceed. Cambridge Phil. Soc.*, 1935, **31**, p. 108-115.

très petite, serait susceptible de provoquer une ionisation des atomes par l'action directe d'un moment électromagnétique propre sur les électrons intraatomiques.

En présence de ces travaux, il nous a semblé qu'il serait utile de préciser quelques-unes des propriétés que l'on peut déduire directement de l'équation d'ondes du corpuscule considéré. Nous nous proposons d'exposer ici les résultats que nous avons obtenus.

2. Nous considérons le corpuscule dont les fonctions d'ondes ψ_k (que nous écrirons simplement ψ à l'avenir) sont solutions dans le champ électromagnétique A_0, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ de l'équation d'ondes

$$\Big[p_0 + \mathbf{p}.\alpha + g[A_0 + \mathbf{A}.\alpha] - f[\mathbf{E}.\boldsymbol{\pi} + \mathbf{H}.\boldsymbol{\mu}] + m_0 c\alpha_4\Big]\psi = 0, \qquad (6)$$

g et f étant deux constantes caractérisant les interactions.

A l'équation (6), nous associons l'équation conjuguée

$$p_0^*\psi^* + \mathbf{p}^*\psi^*\alpha + \psi^*[\ g(A_0 + \mathbf{A}\alpha) - f(\mathbf{E}.\boldsymbol{\pi} + \mathbf{H}.\boldsymbol{\mu}) + m_0 c\alpha_4] = 0. \qquad (7)$$

Multipliant ces équations par α_4, nous en déduisons la relation

$$2m_0 c\int\psi^*\psi\,\mathrm{d}v + \int\psi^*[p_0^*\alpha_4 + p_0\alpha_4]\psi\,\mathrm{d}v - \hbar\int\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}[\psi^* i\alpha\alpha_4\psi]\,\mathrm{d}v + 2g\int\psi^* A_0\alpha_4\psi\,\mathrm{d}v - 2f\int\psi^*[\mathbf{H}.\sigma]\psi\,\mathrm{d}v = 0.$$

Tenant compte de la condition de nullité des ψ aux limites du domaine d'intégration et de l'hermiticité des opérateurs, cette relation se réduit à

$$c\int\psi^*\psi\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{m_0}\int\psi^*[(p_0 + gA_0)\alpha_4 - f(\mathbf{H}.\sigma)]\psi\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{m_0}\int\psi^*\Pi_0\psi\,\mathrm{d}v \qquad (8)$$

en posant

$$\Pi_0 = (p_0 + gA_0)\alpha_4 - f(\mathbf{H}.\sigma). \qquad (9)$$

De même, en multipliant (6) et (7) par $\alpha_p\alpha_4$, nous obtenons, par combinaison, la relation intégrale

$$\left.\begin{aligned}&2m_0 c\int\psi^*\alpha\psi\,\mathrm{d}v - \frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\psi^* i\alpha\alpha_4\psi\,\mathrm{d}v\\ &-2\int\psi^*\Big[(\mathbf{p} + g\mathbf{A})\alpha_4 - f\big[[\mathbf{E}\wedge\sigma] - \mathbf{H}\sigma_0\big]\Big]\psi\,\mathrm{d}v = 0\\ &(\sigma = i\alpha_q\alpha_r,\ i\alpha_r\alpha_p,\ i\alpha_p\alpha_q,\ \sigma_0 = i\alpha_p\alpha_q\alpha_r).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Or, nous avons, en l'absence de champ extérieur,

$$\left.\begin{aligned}c\int\psi^*\psi\,\mathrm{d}v &= -\frac{1}{m_0}\int\psi^* p_0\alpha_4\psi\,\mathrm{d}v,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi^*\Big[\mathbf{x} + \frac{\hbar}{2m_0 c}\boldsymbol{\pi}\Big]\psi\,\mathrm{d}v &= -\int\psi^*\frac{\mathbf{p}}{m_0}\alpha_4\psi\,\mathrm{d}v.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

D'autre part, quel que soit le type d'interaction considérée, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi^*\mathbf{x}\psi\,\mathrm{d}v = -c\int\psi^*\alpha\psi\,\mathrm{d}v. \qquad (12)$$

Combinant cette relation avec (10), nous en déduisons

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi^*\Big[\mathbf{x} + \frac{\hbar}{2m_0 c}\boldsymbol{\pi}\Big]\psi\,\mathrm{d}v &= -\frac{1}{m_0}\int\psi^*\Big[(\mathbf{p} + g\mathbf{A})\alpha_4 - f\big[[\mathbf{E}\wedge\sigma] - \mathbf{H}\sigma_0\big]\Big]\psi\,\mathrm{d}v\\ &= -\frac{1}{m_0}\int\psi^*\Pi\psi\,\mathrm{d}v \qquad (13)\end{aligned}$$

avec

$$\Pi = (\mathbf{p} + g\mathbf{A})\alpha_4 - f\big[[\mathbf{E}\wedge\sigma] - \mathbf{H}\sigma_0\big]. \qquad (14)$$

Les relations (8) et (13) généralisent (11), le vecteur Π_0, Π correspondant au vecteur ρ, $\rho\,\mathbf{v} = \rho\,\frac{\mathbf{p}}{m}$ de la Mécanique ondulatoire sans spin.

3. Nous avons déjà rencontré le quadrivecteur Π_0, Π dans un travail précédent [6] où nous avons étudié comme cas particulier les équations d'ondes du second ordre correspondant à l'équation (6).

Par itération de celle-ci, on obtient facilement

$$\begin{aligned}\Big\{&(p_0 + gA_0)^2 - (\mathbf{p} + g\mathbf{A})^2 - m_0^2c^2\\ &- 2f(\mathbf{H}.\boldsymbol{\mu})(p_0 + gA_0)\\ &+ 2f\big([\mathbf{E}\wedge\boldsymbol{\mu}].(\mathbf{p} + g\mathbf{A})\big)\\ &+ 2f\big(\mathbf{H}.(\mathbf{p} + g\mathbf{A})\big)i\alpha_5 - f^2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)\\ &- 2f^2(\mathbf{E}.\mathbf{H})i\sigma_0 + \hbar g[(\mathbf{E}.i\alpha) - (\mathbf{H}.\sigma)]\Big\}\psi = 0.\end{aligned}$$

Cette équation, dans laquelle nous avons posé

$$\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

n'est pas hermitienne, mais par multiplication par α_4, elle devient hermitienne et s'écrit

$$\begin{aligned}\Big\{&\alpha_4[(p_0 + gA_0)^2 - (\mathbf{p} + g\mathbf{A})^2 - m_0^2c^2]\\ &- 2f(\mathbf{H}.\sigma)(p_0 + gA_0)\\ &+ 2f\big([\mathbf{E}\wedge\sigma].(\mathbf{p} + g\mathbf{A})\big)\\ &- 2f\big(\mathbf{H}.(\mathbf{p} + g\mathbf{A})\big)\sigma_0\\ &- f^2[\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2]\alpha_4\\ &- 2f^2(\mathbf{E}.\mathbf{H})\alpha_5 - \hbar g[\mathbf{E}.\boldsymbol{\pi} + \mathbf{H}.\boldsymbol{\mu}]\Big\}\psi = 0. \qquad (15)\end{aligned}$$

Introduisant dans cette équation les expressions (9) et (14) de Π_0 et Π, nous obtenons, après division

([6]) G. Petiau, *J. de Physique*, 1947, **8**, p. 134-139.

par $2m_0$,

$$\left\{\frac{1}{2m_0}[\Pi_0\alpha_4\Pi_0 - \Pi\alpha_4\Pi - m_0^2c^2\alpha_4] - \frac{f^2}{2m_0}[(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)\alpha_4 + 2(\mathbf{E}.\mathbf{H})\alpha_5] - \frac{\hbar g}{2m_0}[\mathbf{E}.\pi + \mathbf{H}.\mu]\right\}\psi = 0. \quad (16)$$

Cette équation met en évidence, d'une part l'interaction électromagnétique due à la charge électrique et au spin

$$-\frac{\hbar g}{2m_0}[\mathbf{E}.\pi + \mathbf{H}.\mu]$$

et, d'autre part, deux termes d'énergie potentielle correspondant à l'interaction en f, l'un classique :

$$-\frac{f^2}{2m_0}[\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2]\alpha_4,$$

l'autre

$$-\frac{f^2}{m_0}(\mathbf{E}.\mathbf{H})\alpha_5$$

purement quantique et caractéristique des mélanges d'états à énergies positives et négatives.

4. L'équation (6) écrite sous la forme

$$L\psi = 0 \quad (17)$$

nous permet de calculer la dérivée par rapport au temps des grandeurs caractéristiques du corpuscule au moyen de la formule de dérivation quantique

$$\frac{d}{dt}\int\psi^* A\psi\, dv = \frac{ic}{\hbar}\int\psi^*[LA - AL]\psi\, dv, \quad (18)$$

A étant l'opérateur correspondant à la grandeur considérée.

En particulier, si nous considérons l'opérateur $\mathbf{p} + g\mathbf{A}$ ayant la variance de la composante xt d'un tenseur du second ordre, nous obtenons facilement la relation

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\psi\, dv = -gc\int\psi^*[\mathbf{E}+\mathbf{H}\wedge\alpha]\psi\, dv - fc\int\psi^*\,\mathrm{grad}(\mathbf{E}.\pi + \mathbf{H}.\mu)\psi\, dv. \quad (19)$$

Le premier terme du second membre peut se transformer en utilisant les équations (6) et (7) multipliées par

$$\mathbf{E}\alpha_4 + [\mathbf{H}\wedge\alpha]\alpha_4$$

et par

$$\mathbf{E}\alpha_4 + \alpha_4[\mathbf{H}\wedge\alpha].$$

On obtient alors, par combinaison, la relation intégrale

$$\int\psi^*[\mathbf{E}+\mathbf{H}\wedge\alpha]\psi\, dv = -\frac{1}{m_0c}\int\psi^*\left\{\left[\mathbf{E}(p_0+gA_0) - [\mathbf{H}\wedge(\mathbf{p}+g\mathbf{A})]\right]\alpha_4 - f(\mathbf{E}.\mathbf{H})\sigma\right\}\psi\, dv + \frac{\hbar}{2m_0c^2}\frac{d}{dt}\int\psi^*[\mathbf{H}\wedge\pi]\psi\, dv - \frac{\hbar}{2m_0c}\int\psi^*\,\mathrm{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\, dv. \quad (20)$$

Si nous tenons compte de cette relation dans (19), celle-ci devient

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\left[\mathbf{p}+g\mathbf{A}+\frac{g\hbar}{2m_0c}[\mathbf{H}\wedge\pi]\right]\psi\, dv = \frac{g}{m_0}\int\psi^*\left\{\left[\mathbf{E}(p_0+gA_0) - [\mathbf{H}\wedge(\mathbf{p}+g\mathbf{A})]\right]\alpha_4 - f(\mathbf{E}.\mathbf{H})\sigma\right\}\psi\, dv + \left[\frac{g\hbar}{2m_0} - fc\right]\int\psi^*\,\mathrm{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\, dv. \quad (21)$$

Mais, d'autre part, les définitions (9) et (14) de Π_0 et Π et l'identité vectorielle

$$[\mathbf{A}\wedge[\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}]] = (\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C})) - (\mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B}))$$

nous donnent

$$\mathbf{E}\Pi_0 - [\mathbf{H}\wedge\Pi] = \left[\mathbf{E}(p_0+gA_0) - [\mathbf{H}\wedge(\mathbf{p}+g\mathbf{A})]\right]\alpha_4 - f(\mathbf{E}.\mathbf{H})\sigma. \quad (22)$$

Par suite, la relation (21) s'écrit encore

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\left[\mathbf{p}+g\mathbf{A}+\frac{g\hbar}{2m_0c}[\mathbf{H}\wedge\pi]\right]\psi\, dv = \frac{g}{m_0}\int\psi^*\left[\mathbf{E}\Pi_0 - [\mathbf{H}\wedge\Pi]\right]\psi\, dv + \left(\frac{g\hbar}{2m_0} - fc\right)\int\psi^*\,\mathrm{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\, dv. \quad (23)$$

Cette relation généralise celle que l'on obtient ([7]) dans le cas de l'équation de Dirac usuelle où l'on a

$$g = \frac{\varepsilon}{c}, \qquad f = 0$$

et qui s'écrit

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\left[\mathbf{p}+\frac{\varepsilon}{c}\mathbf{A}+\frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c^2}[\mathbf{H}\wedge\pi]\right]\psi\, dv = \frac{\varepsilon}{m_0c}\int\psi^*\left[\mathbf{E}(p_0+gA_0) - [\mathbf{H}\wedge(\mathbf{p}+g\mathbf{A})]\right]\alpha_4\psi\, dv + \frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c}\int\psi^*\,\mathrm{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\, dv \quad (24)$$

([7]) G. Petiau, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1948, **226**, p. 313-314.

mettant en évidence au second membre la force de Lorentz classique et la force électromagnétique due à l'existence du spin ou force de spin correspondant à l'énergie électromagnétique propre

$$-\frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c}[\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu].$$

Néanmoins, l'équation (23) qui met en évidence au second membre la force de Lorentz généralisée représentée par l'opérateur

$$\frac{g}{m_0}(\mathbf{E}.\Pi_0-[\mathbf{H}\wedge\Pi])$$

et la force de spin d'opérateur

$$\operatorname{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)$$

avec, pour coefficient d'une façon additive, les moments $\frac{g\hbar}{2m_0}$ et $-fc$, n'est pas complètement satisfaisante. En effet, l'opérateur $\mathbf{p}+g\mathbf{A}$ peut être complété par des opérateurs de même variance construits au moyen des grandeurs du champ et des matrices caractéristiques du corpuscule. En particulier, nous pouvons compléter cet opérateur par l'expression $-f(\mathbf{E}\wedge\mu)$ en considérant pour tenseur d'impulsion totale l'expression

$$\mathbf{p}+g\mathbf{A}-f[\mathbf{E}\wedge\mu]. \qquad (25)$$

Afin d'examiner les modifications que le choix de cette expression entraîne dans la représentation des forces appliquées au corpuscule, nous devons dériver l'opérateur $[\mathbf{E}\wedge\mu]$.

En utilisant les équations (6) et (7) on obtient facilement la relation intégrale

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\psi^*[\mathbf{E}\wedge\mu]\psi\,dv$$
$$=\int\psi^*\left[\frac{1}{c}\partial_t[\mathbf{E}\wedge\mu]-\operatorname{grad}(\mathbf{E}.\pi)\right]\psi\,dv$$
$$+\frac{2}{\hbar}\int\psi^*\Big\{\big[\mathbf{E}\wedge\big((\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_5$$
$$+f[\mathbf{H}\wedge\sigma]\big)\big]\Big\}\psi\,dv. \qquad (26)$$

Remarquant que nous avons

$$\left[\left(\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E}\right)\wedge\mu\right]=-\operatorname{grad}(\mathbf{H}.\mu)+(\mu\operatorname{grad}\mathbf{H}), \qquad (27)$$

(26) devient

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\psi^*[\mathbf{E}\wedge\mu]\psi\,dv$$
$$=-\int\psi^*\operatorname{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\,dv$$
$$+\int\psi^*(\mu.\operatorname{grad}\mathbf{H})\psi\,dv$$
$$+\frac{2}{\hbar}\int\psi^*\Big\{\big[\mathbf{E}\wedge\big((\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_5$$
$$+f[\mathbf{H}\wedge\sigma]\big)\big]\Big\}\psi\,dv. \qquad (28)$$

Alors que, dans (21), nous avions introduit

$$\Pi=(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_4-f([\mathbf{E}\wedge\sigma]-\mathbf{H}\sigma_0),$$

nous sommes conduits ici à introduire le vecteur dual

$$\Pi^*=(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_5+f([\mathbf{H}\wedge\sigma]+\mathbf{E}\sigma_0). \qquad (29)$$

De même, nous introduisons le dual de

$$\Pi_0=(p_0+gA_0)\alpha_4-f(\mathbf{H}.\sigma)$$

par

$$\Pi_0^*=(p_0+gA_0)\alpha_5+f(\mathbf{E}.\sigma). \qquad (30)$$

Or, par combinaison de (6) et (7) multipliées par $\mathbf{H}\,\alpha_5$, nous obtenons la relation intégrale

$$\frac{2}{\hbar}\int\psi^*\big[\mathbf{H}[(p_0+gA_0)\alpha_5+f(\mathbf{H}.\sigma)]\big]\psi\,dv$$
$$=-\int\psi^*(\mu.\operatorname{grad}\mathbf{H})\psi\,dv \qquad (31)$$

et, par suite, (28) devient

$$f\frac{d}{dt}\int\psi^*[\mathbf{E}\wedge\mu]\psi\,dv$$
$$=-\frac{2fc}{\hbar}\int\psi^*\big[\mathbf{H}\Pi_0^*-[\mathbf{E}\wedge\Pi^*]\big]\psi\,dv$$
$$-fc\int\psi^*\operatorname{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\,dv. \qquad (32)$$

Complétant (23) avec cette expression, nous obtenons finalement la dérivée de l'impulsion généralisée (25).

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\Big[\mathbf{p}+g\mathbf{A}-f[\mathbf{E}\wedge\mu]$$
$$+\frac{g\hbar}{2m_0c}[\mathbf{H}\wedge\pi]\Big]\psi\,dv$$
$$=\frac{g}{m_0}\int\psi^*\big[\mathbf{E}.\Pi_0-[\mathbf{H}\wedge\Pi]\big]\psi\,dv$$
$$+\frac{2fc}{\hbar}\int\psi^*\big[\mathbf{H}\Pi_0^*-[\mathbf{E}\wedge\Pi^*]\big]\psi\,dv$$
$$+\frac{g\hbar}{2m_0}\int\psi^*\operatorname{grad}(\mathbf{E}.\pi+\mathbf{H}.\mu)\psi\,dv. \qquad (33)$$

Nous voyons apparaître au second membre deux « forces de Lorentz » duales l'une de l'autre, associées, l'une à la charge $\left(g=\frac{\varepsilon}{c}\right)$, l'autre à une charge fictive ε' que l'on peut déduire de la constante f par la relation $\varepsilon'=\frac{2m_0c^2}{\hbar}f$. Mais la seule force de spin est alors celle qui correspond à la charge vraie, c'est-à-dire à la constante g, résultat en accord avec celui que nous déduisons de l'équation d'ondes du second ordre (16) où le terme d'énergie potentielle dû au moment magnétique propre ne dépend que de la constante g.

Remarquons que si nous posons $g'=\frac{\varepsilon'}{c}$, le tenseur d'impulsion généralisé intervenant au premier membre de (33), s'écrit encore

$$\mathbf{p}+g\mathbf{A}+\frac{\hbar}{2m_0c}\big[g[\mathbf{H}\wedge\pi]-g'[\mathbf{E}\wedge\mu]\big]. \qquad (34)$$

Dans le cas où le champ extérieur est uniquement un champ magnétique indépendant du temps, les

formules (33) ou (24) se réduisent à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi^\star \left[\mathbf{p} + g\mathbf{A} + \frac{g\hbar}{2m_0 c}[\mathbf{H}\wedge \boldsymbol{\pi}]\right]\psi\,\mathrm{d}v$$
$$= -\frac{g}{m_0}\int \psi^\star[\mathbf{H}\wedge(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_4]\psi\,\mathrm{d}v$$
$$+\left[\frac{g\hbar}{2m_0} - fc\right]\int \psi^\star\,\mathrm{grad}(\mathbf{H}.\boldsymbol{\mu})\psi\,\mathrm{d}v. \qquad (35)$$

Dans ce cas, à côté de la force de Lorentz proprement dite, les forces en g et f correspondant au moment magnétique propre interviennent d'une façon additive.

Si l'on examine les conditions dans lesquelles on peut évaluer la force de Lorentz représentée par l'opérateur

$$-\frac{g}{m_0}[\mathbf{H}\wedge(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_4],$$

on voit que cette évaluation exige la mesure simultanée du champ $g\mathbf{H}$ et de la vitesse $(p + g\mathbf{A})\frac{\alpha_4}{m_0}$.

Or, d'après la théorie générale de la mesure [8], on sait que si deux grandeurs physiques observables sont représentées par les opérateurs linéaires et hermitiens A et B, on a

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\overline{[A, B]},$$

$[A, B]$ représentant le commutateur de A et B et ΔA, ΔB les écarts quadratiques définis par

$$(\Delta A)^2 = \overline{(A - \bar{A})^2}, \qquad (\Delta B)^2 = \overline{(B - \bar{B})^2}.$$

Appliquant ce théorème, nous voyons que l'évaluation de la force de Lorentz introduit une erreur supérieure à

$$\frac{g\hbar}{2m_0}|\,\mathrm{grad}\,\mathbf{H}\alpha_4\,| \qquad \text{ou} \qquad \frac{g\hbar}{2m_0}|\,\mathrm{grad}(\mathbf{H}.\boldsymbol{\mu})\,|.$$

Nous retrouvons ici un résultat qui a fait l'objet de nombreuses discussions [9] d'après lesquelles on conclut généralement que la force de spin ne peut être mise en évidence par une expérience directe, l'incertitude dans la mesure de la force de Lorentz étant toujours supérieure à la force de spin (ou de moment électromagnétique propre).

Mais nous voyons ici que ce raisonnement ne porte que sur la force de spin dépendant du facteur g $\left(\text{c'est-à-dire de la charge si } g = \frac{\varepsilon}{c}\right)$. Si le coefficient d'interaction électromagnétique directe fc est notablement supérieur au moment magnétique propre dû à la charge $\frac{g\hbar}{2m_0} = \frac{\varepsilon\hbar}{2m_0 c}$, la force de spin pourra être mise en évidence par une expérience directe.

([8]) *Voir*, par exemple : L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin*, p. 30-32.

([9]) *Voir*, par exemple, le Rapport de M. W. Pauli au Congrès Solvay de 1930 sur le Magnétisme.

Nous retrouvons encore ici une des conclusions du rapport cité de M. W. Pauli [1].

On sait, par ailleurs, que M. J. Thibaud [10], étudiant le comportement de certains rayonnements β dans des champs magnétiques inhomogènes a été conduit à admettre l'existence de particules très pénétrantes caractérisées par un moment électromagnétique important et qu'il a désignées sous le nom d'électrinos. Si l'on admet que ces particules satisfont à l'équation d'ondes de Dirac, la considération d'une interaction magnétique directe en f [analogue à celle introduite par H. Bethe [5] dans le cas du neutrino] donnant un moment magnétique prépondérant devant celui en g permettrait d'examiner indépendamment l'action de la force de Lorentz et celle de la force de spin correspondant au moment magnétique en f et de justifier, par un équilibre entre ces forces, les répartitions corpusculaires observées.

5. Nous allons retrouver les résultats précédents en examinant l'approximation non relativiste correspondant à l'équation (6).

Pour cela, suivant le procédé introduit par W. Pauli et repris par R. G. Sachs, nous allons utiliser la représentation donnée par Dirac pour les matrices α en écrivant

$$\alpha = \sigma\rho_1, \qquad \alpha_4 = \rho_3$$

les σ et les ρ étant deux systèmes de trois matrices à deux lignes et deux colonnes, indépendantes, tels que

$$\sigma_p\sigma_q = -i\sigma_r, \qquad \rho_p\rho_q = -i\rho_r, \qquad \sigma_p\rho_q = \rho_q\sigma_p$$
$$(p, q, r = 1, 2, 3)$$

et pour lesquels nous prenons la représentation de Pauli :

$$\begin{matrix}\sigma_1\\ \text{ou } \rho_1\end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix}\sigma_2\\ \text{ou } \rho_2\end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix},$$
$$\begin{matrix}\sigma_3\\ \text{ou } \rho_3\end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Nous avons alors

$$i\alpha_p\alpha_q = \sigma_r, \qquad i\alpha_p\alpha_q\alpha_r = \sigma_0 = \rho_1, \qquad \alpha_p\alpha_q\alpha_r\alpha_4 = \alpha_5 = \rho_2,$$
$$i\alpha_p\alpha_q\alpha_4 = \mu_r = \sigma_r\rho_3, \qquad i\alpha_p\alpha_4 = \pi_p = -\sigma_p\rho_2.$$

Si, au lieu de repérer les quatre fonctions d'ondes ψ_k par l'indice $k = 1, 2, 3, 4$, nous introduisons deux indices $l = 1, 2$, $m = 1, 2$ écrivant $\psi_{l,m}$, l'indice l correspondant aux matrices σ, l'indice m aux matrices ρ, les fonctions ψ_1, ψ_2 s'écriront $\psi_{l,1}$ les fonctions ψ_3, ψ_4 s'écriront $\psi_{l,2}$. Nous écrirons, dans ce qui suit, φ_1 pour $\psi_{l,1}$, φ_2 pour $\psi_{l,2}$ en omettant l'indice l.

En mettant en évidence ces fonctions φ_1 et φ_2,

([10]) M. J. Thibaud, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1946, **223**, p. 984; 1947, **224**, p. 739 et 914.

l'équation (6) se décompose en donnant le système

$$\left.\begin{aligned}&[p_0+gA_0+m_0c-f(\mathbf{H}.\sigma)]\varphi_1\\&\quad+\big((\mathbf{p}+g\mathbf{A}+if\mathbf{E}).\sigma\big)\varphi_2=0,\\&[p_0+gA_0-m_0c+f(\mathbf{H}.\sigma)]\varphi_2\\&\quad+\big((\mathbf{p}+g\mathbf{A}-if\mathbf{E}).\sigma\big)\varphi_1=0.\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

Si, dans l'opérateur d'énergie cp_0, nous séparons l'énergie massique propre m_0c^2 en écrivant

$$p_0=p'_0+m_0c,$$

cp'_0 correspondra à l'énergie non relativiste.

Si, en outre, nous avons

$$gA_0-f\mathbf{H}\ll m_0c,$$

$$p'_0\approx\frac{W}{c}\qquad\text{avec}\quad W\ll m_0c^2$$

la première des équations (36) nous donnera approximativement

$$\varphi_1=-\frac{1}{2m_0c}([p+g\mathbf{A}+if\mathbf{E}].\sigma)\varphi_2\qquad(37)$$

tandis que la seconde des équations (36) s'écrit

$$\begin{aligned}&[p'_0+gA_0+f(\mathbf{H}.\sigma)]\varphi_2\\&\quad+[(\mathbf{p}+g\mathbf{A}-if\mathbf{E}).\sigma]\varphi_1=0.\end{aligned}\qquad(38)$$

Reportant (37) dans (38), les fonctions φ_2 seront déterminées par l'équation

$$\begin{aligned}&\Big\{p'_0+gA_0+f(\mathbf{H}.\sigma)\\&\quad-\frac{1}{2m_0c}[(\mathbf{p}+g\mathbf{A}-if\mathbf{E}).\sigma]\\&\qquad\times[(\mathbf{p}+g\mathbf{A}+if\mathbf{E}).\sigma]\Big\}\varphi_2=0.\end{aligned}\qquad(39)$$

Or, nous avons, tenant compte de $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$,

$$(\mathbf{p}+g\mathbf{A}-if\mathbf{E})(\mathbf{p}+g\mathbf{A}+if\mathbf{E})=(\mathbf{p}+g\mathbf{A})^2+f^2\mathbf{E}^2$$

et en utilisant l'identité

$$([\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}].\mathbf{C})=-([\mathbf{A}\wedge\mathbf{C}].\mathbf{B}),$$

$$\begin{aligned}&\sum_{p\neq q}\Big[\,[p_p+gA_p-ifE_p][p_q+gA_q+ifE_q]\\&\quad-[p_q+gA_q-ifE_q][p_p+gA_p+ifE_p]\Big]\sigma_p\sigma_q\\&=g\hbar(\mathbf{H}.\sigma)+2f\big([\mathbf{E}\wedge\sigma].(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\big)+if\hbar(\operatorname{Rot}\mathbf{E}.\sigma),\end{aligned}$$

L'équation (39) devient alors

$$\begin{aligned}&\Big\{p'_0+gA_0+f(\mathbf{H}.\sigma)-\frac{1}{2m_0c}\\&\quad\times\Big[(\mathbf{p}+g\mathbf{A})^2\\&\qquad+2f\big([\mathbf{E}\wedge\sigma].(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\big)+f^2\mathbf{E}^2\\&\qquad+g\hbar(\mathbf{H}.\sigma)+if\hbar(\operatorname{Rot}\mathbf{E}.\sigma)\Big]\Big\}\varphi_2=0.\end{aligned}\qquad(40)$$

Posant

$$\mathbf{P}=\mathbf{p}+g\mathbf{A}+f[\mathbf{E}\wedge\sigma]\qquad(41)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^2=&(\mathbf{p}+g\mathbf{A})^2+2f[(\mathbf{E}\wedge\sigma).(\mathbf{p}+g\mathbf{A})]\\&+2f^2\mathbf{E}^2+i\hbar f(\operatorname{Rot}\mathbf{E}.\sigma)\end{aligned}$$

et l'équation (40) devient

$$\begin{aligned}&\Big\{p'_0+gA_0-\frac{1}{2m_0c}\mathbf{P}^2\\&\quad-\Big[\frac{g\hbar}{2m_0c}-f\Big](\mathbf{H}.\sigma)+\frac{f^2\mathbf{E}^2}{2m_0c}\Big\}\varphi_2=0.\end{aligned}\qquad(42)$$

Le système (42) correspond aux équations d'ondes à l'approximation non relativiste cherchées.

Ces équations introduisent l'impulsion généralisée

$$\mathbf{P}=\mathbf{p}+g\mathbf{A}+f[\mathbf{E}\wedge\sigma]\qquad(43)$$

qui correspond à l'approximation non relativiste du vecteur $-\Pi$ et du tenseur d'impulsion

$$\mathbf{p}+g\mathbf{A}+\frac{\hbar g}{2m_0c}[\mathbf{H}\wedge\pi]-f[\mathbf{E}\wedge\mu].$$

En effet, ce dernier s'écrit encore

$$\mathbf{p}+g\mathbf{A}-\frac{\hbar g}{2m_0c}[\mathbf{H}\wedge\sigma]\rho_2-f[\mathbf{E}\wedge\sigma]\rho_3$$

et si nous prenons seulement les termes d'indice 22 en ρ, tenant compte de $(\rho_2)_{22}=0$, $(\rho_3)_{22}=-1$, ce tenseur se réduit à l'expression (43) de $\mathbf{P}$.

De même, avec

$$\begin{aligned}\Pi&=(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\alpha_4-f([\mathbf{E}\wedge\sigma]-\mathbf{H}\sigma_0)\\&=(\mathbf{p}+g\mathbf{A})\rho_3-f([\mathbf{E}\wedge\sigma]-\mathbf{H}\rho_1)\end{aligned}$$

les termes d'indices 22 en ρ nous donnent

$$(\Pi)_{22}=-(\mathbf{p}+g\mathbf{A}+f[\mathbf{E}\wedge\sigma])=-\mathbf{P}.$$

L'équation (42) considérée comme généralisant l'équation de Schrödinger introduit les deux moments magnétiques propres en g et f d'une façon additive dans le terme d'énergie potentielle

$$-\Big[\frac{g\hbar}{2m_0}-fc\Big](\mathbf{H}.\sigma)$$

l'impulsion généralisée (41) remplaçant l'impulsion $\mathbf{p}+g\mathbf{A}$ usuelle.

6. Nous allons examiner plus en détail l'approximation de l'équation (6) lorsque le champ extérieur se réduit à un champ électrique central $\mathbf{E}=\mathbf{E}(r)$ en mettant en évidence le couplage spin-orbite.

L'équation (6) se réduit alors à

$$\big[p_0+gU(r)+\mathbf{p}\alpha-f[\mathbf{E}(r).\pi]+m_0c\alpha_4\big]\psi=0.\qquad(44)$$

La décomposition (36) nous donne encore en posant

$$p_0=p'_0+m_0c,\qquad p'_0\psi=\frac{W}{c}\psi,\qquad W\ll m_0c^2,$$

$$\left.\begin{aligned}&\Big(\frac{W}{c}+gU+2m_0c\Big)\varphi_1+[(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\varphi_2=0,\\&\Big(\frac{W}{c}+gU\Big)\varphi_2+[(\mathbf{p}-if\mathbf{E}).\sigma]\varphi_1=0.\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

Posant

$$\frac{1}{W+gcU+2m_0c^2}=\frac{1}{2m_0c^2}f(r)\qquad(46)$$

nous en tirons

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1 = -\frac{f(r)}{2m_0c}[(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\varphi_2,\\&\left\{\frac{W}{c}+gU-\frac{1}{2m_0c}\right.\\&\quad\times[(\mathbf{p}-if\mathbf{E}).\sigma]f(r)[(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\Big\}\varphi_2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Calculant l'expression

$$\begin{aligned}&[(\mathbf{p}-if\mathbf{E}).\sigma]f(r)[(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\\&\quad = f(r)[(\mathbf{p}-if\mathbf{E}).\sigma][(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\\&\quad + i\hbar f'_r\left(\frac{\mathbf{x}.\sigma}{r}\right)[(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\end{aligned}$$

le premier terme du second membre s'écrit

$$\begin{aligned}&f(r)[\mathbf{p}^2+f^2\mathbf{E}^2+2f[(\mathbf{E}\wedge\sigma).\mathbf{p}]\\&\quad = f(r)\left[\big(\mathbf{p}+f(\mathbf{E}\wedge\sigma)\big)^2-f^2\mathbf{E}^2\right]\\&\quad = f(r)[\mathbf{P}^2-f^2\mathbf{E}^2].\end{aligned} \quad (48)$$

En utilisant les relations vectorielles

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}.\sigma)(\mathbf{B}.\sigma) &= (\mathbf{A}.\mathbf{B}) - ([\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}].i\sigma),\\([\mathbf{x}\wedge\mathbf{A}].\sigma) &= (\mathbf{x}.[\mathbf{A}\wedge\sigma]),\\(\mathbf{x}.\mathbf{A}) &= rA_r\end{aligned}$$

le second terme devient

$$\begin{aligned}&(\mathbf{x}.\sigma)[(\mathbf{p}+if\mathbf{E}).\sigma]\\&\quad = (\mathbf{x}.\mathbf{p}) - ([\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}].i\sigma) + if(\mathbf{x}.\mathbf{E}) + f([\mathbf{x}\wedge\mathbf{E}].\sigma)\\&\quad = \big(\mathbf{x}.(\mathbf{p}+f[\mathbf{E}\wedge\sigma])\big) - ([\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}].i\sigma) + if(\mathbf{x}.\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Or, si $\mathbf{E} = E(r)$, nous avons

$$(\mathbf{x}.[\mathbf{E}\wedge\sigma]) = 0$$

et le terme cherché se réduit à

$$\begin{aligned}&i\hbar\frac{f'_r}{r}\left[ir\left(\hbar\frac{\partial}{\partial r}+fE(r)\right)-i([\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}].\sigma)\right]\\&\quad = -f'_r\hbar\left[\left(\hbar\frac{\partial}{\partial r}+fE(r)\right)-\left(\frac{[\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}]}{r}.\sigma\right)\right]\end{aligned} \quad (49)$$

Introduisant le moment orbital

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}], \quad (50)$$

l'équation approchée (47) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{W}{c}+gU-\frac{f(r)}{2m_0c}[\mathbf{P}^2-f^2\mathbf{E}^2]\right.\\&\quad\left.+\frac{f'_r\hbar}{2m_0c}\left[\left(\hbar\frac{\partial}{\partial r}+fE(r)\right)-\left(\frac{\mathbf{L}.\sigma}{r}\right)\right]\right\}\varphi_2 = 0.\end{aligned} \quad (51)$$

Or, nous avons, en nous bornant aux premiers termes,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m_0c}f(r) &= \frac{1}{2m_0c} - \frac{\dfrac{W}{c}+gU}{(2m_0c)^2} + \ldots\\\frac{1}{2m_0c}f'_r(r) &= \frac{-gU'_r}{(2m_0c)^2} = \frac{gE(r)}{(2m_0c)^2} - \ldots.\end{aligned}$$

Introduisant ces expressions dans l'équation (51), nous avons les équations approchées aux différents ordres

1° $$\left\{\frac{W}{c}+gU(r)-\frac{1}{2m_0c}[\mathbf{P}^2-f^2\mathbf{E}^2]\right\}\varphi_2 = 0$$

Nous retrouvons ici l'équation (42).

2° A l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{W}{c}+gU(r)-\frac{1}{2m_0c}[\mathbf{P}^2-f^2\mathbf{E}^2]\right.\\&\quad+\frac{1}{(2m_0c)^3}[\mathbf{P}^2-f^2\mathbf{E}^2]^2\\&\quad\left.+\frac{g\hbar E(r)}{(2m_0c)^2}\left[\left(\hbar\frac{\partial}{\partial r}+fE(r)\right)-\left(\frac{\mathbf{L}.\sigma}{r}\right)\right]\right\}\varphi_2 = 0\end{aligned} \quad (52)$$

Cette expression ne fait intervenir l'interaction en f que dans l'impulsion généralisée $\mathbf{P}$, mais non pas dans le terme de couplage spin-orbite $\left(\frac{\mathbf{L}.\sigma}{r}\right)$ qui ne dépend que du coefficient g.

Si nous introduisons, au lieu du moment orbital

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}]$$

le moment orbital généralisé

$$\mathcal{L} = [\mathbf{x}\wedge\mathbf{P}] = \big[\mathbf{x}\wedge(\mathbf{p}+f[\mathbf{E}\wedge\sigma])\big]$$

nous avons

$$(\mathcal{L}.\sigma) = ([\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}].\sigma) + f\Big(\big[\mathbf{x}\wedge[\mathbf{E}\wedge\sigma]\big].\sigma\Big)$$

Or, tenant compte de

$$([\mathbf{E}\wedge\sigma].\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$$

nous avons

$$\begin{aligned}&\Big(\big[\mathbf{x}\wedge[\mathbf{E}\wedge\sigma]\big].\sigma\Big)\\&\quad = -i([\mathbf{E}\wedge\sigma].\mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}.\mathbf{E}) = -2(\mathbf{x}.\mathbf{E}),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathcal{L}.\sigma}{r}\right) &= \left(\left[\frac{\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}}{r}\right].\sigma\right) - 2f\left(\frac{\mathbf{x}.\mathbf{E}}{r}\right)\\&= \left(\frac{\mathbf{L}.\sigma}{r}\right) - 2fE(r).\end{aligned} \quad (53)$$

Introduisant cette expression dans (52), cette équation devient

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{W}{c}+gU(r)-\frac{1}{2m_0c}[\mathbf{P}^2-f^2E^2]\right.\\&\quad+\frac{1}{(2m_0c)^3}[\mathbf{P}^2-f^2\mathbf{E}^2]^2\\&\quad\left.+\frac{g\hbar E(r)}{(2m_0c)^2}\left[\hbar\frac{\partial}{\partial r}+3fE(r)-\left(\frac{\mathcal{L}.\sigma}{r}\right)\right]\right\}\varphi_2 = 0\end{aligned}$$

mettant en évidence à côté du terme de correction relativiste en $\frac{1}{(2m_0c)^3}$, le terme de couplage spin-orbite en $\left(\frac{\mathcal{L}.\sigma}{r}\right)$.

Manuscrit reçu le 9 avril 1948.

Le Gérant : Maurice Blondin. 129496 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1948.